Řešení dú
13. sada

2.e) Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině $M = \{(x, y, z) : \max |x|, |y|, |z| \leq 1\}$.

Množina M je krychle s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, kde znaménka jsou na sobě nezávislá. Jedná se uzavřenou jednotkovou kouly v suprémové normě $\|(x, y, z)\|_{+\infty} = \max\{|x|, |y|, |z|\}$. Tudíž M je uzavřená a omezená, tedy kompaktní. Dále f je spojitá na $\mathbb{R}^3$, tudíž i na M a tedy f nabývá na M extrému.

Dále vnitřek M je $M^o = \{(x, y, z) : \max\{|x|, |y|, |z|\} < 1\}$ a hranice M je dána

$$\partial M = \{(x, y, z) : (\max\{|x|, |y|, |z|\} < 1) \wedge (|x| = 1 \vee |y| = 1 \vee |z| = 1)\}.$$

Na M^o musí v bodě extrému a platit

$$0 = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tudíž extrémy funkce f na M musí ležet na ∂M. Uvnitř dolní podstavy

$$\{(x, y, -1) : \max\{|x|, |y|\} < 1\} = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0, \ |x|, |y| < 1\},$$

kde $g(x, y, z) = z + 1$, musí v bodě lokálního extrému platit

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tyto rovnice opět nemají řešení. Stejný výpočet platí i pro všechny ostatní stěny krychle. Tudíž extrém musí ležet na některé hraně krychle.

Uvnitř hrany

$$\{(x, -1, -1) : |x| < 1\} = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0, \ h(x, y, z) = 0, \ |x| < 1\},$$

kde $h(x, y, z) = y + 1$, musí v bodě lokálního extrému platit

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g(a) + \lambda_2 \nabla h(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Tyto rovnice opět nemají řešení. Stejný výpočet platí i pro všechny ostatní stěny hrany. Tudíž extrém musí ležet v některém vrcholu krychle.

Nyní je již jednoduché dopočítat, že maximum je v bodě $(1, 1, 1)$ a $f(1, 1, 1) = 3$, zatímco minimum nastává v opačném vrcholu $-(1, 1, 1)$ a $f(-1, -1, -1) = 3$.