Řešení vybraných úloh
10. sada

Úmluva: Otevřenou kouli se středem v bodě x a poloměrem ϵ budeme značit $U_\epsilon(x)$.

(1.a) Najděte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Řešení: Použijeme polární souřadnice $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ r > 0,\ \phi \in [0, 2\pi)$. Potom máme

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)} = e^{r^4\cos^2\phi\sin^2\phi\ln(r^2)} = e^{\frac{1}{2}r^4\sin^2(2\phi)\ln r},$$

Dále

$$\forall\phi\in\mathbb{R} : 0 \le |\frac{1}{2}r^4\sin^2 2\phi\ln r| \le \frac{1}{2}r^4\ln r,$$

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{2}r^4\ln r = \lim_{r\to0^+}\frac{\ln r}{2r^{-4}} = \lim_{r\to0^+}\frac{\frac{1}{r}}{-8r^{-5}} = \lim_{r\to0^+}\frac{r^4}{-8} = 0,$$

$$0 \le \lim_{r\to0^+}|\frac{1}{2}r^4\sin^2 2\phi\ln r| \le \lim_{r\to0^+}\frac{1}{2}r^4\ln r = 0 \ \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

Konečně z věty o limitě složené funkce máme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{r\to0^+} e^{\frac{1}{2}r^4\sin^2 2\phi\ln r} = 1.$$

(1.b) Najděte $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Řešení: 1. postup. Opět položíme, kde $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ r > 0,\ \phi \in [0, 2\pi)$. Pak

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{r(\cos\phi+\sin\phi)}{r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi-\sin\phi\cos\phi)} = \frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\frac{1}{2}\sin 2\phi)}$$

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \left|\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r(1-\frac{1}{2}\sin 2\phi)}\right| \le \frac{|\cos\phi|+|\sin\phi|}{\frac{r}{2}} \le \frac{2}{\frac{r}{2}} = \frac{4}{r}.$$

Tudíž

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \lim_{r\to+\infty}\frac{2}{r} = 0.$$

To je ekvivalentní s tím, že

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

2. postup. Nejprve připomeňme standardní odhad

$$2|xy| \le x^2+y^2 \Leftrightarrow -x^2-y^2 \le 2xy \le x^2+y^2,$$

který plyne z $(x-y)^2 \ge 0$ a $(x+y)^2 \ge 0$. Tudíž máme odhady

$$x^2-xy+y^2 \ge x^2+y^2-|xy| \ge x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Dále máme

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \le \sqrt{2(x^2+y^2)} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Tudíž

$$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2-xy}\right| \le \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{2(x^2+y^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pak ale

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}\left|\frac{x+y}{x^2+y^2-xy}\right| \le \lim_{\|(x,y)\|\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

a to je ekvivalentní s

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2-xy} = 0.$$

(1.c) Najděte $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Řešení: Platí odhady

$$x^2+y^2 = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = \sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4} \leq \sqrt{2(x^4+y^4)} = \sqrt{2}\sqrt{x^4+y^4}$$

$$0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Tudíž

$$0 \leq \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0.$$

(1.d) Najděte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

Řešení: Pro $x \neq 0$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{y\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,a)} y \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy} = a.1 = a.$$

Zde jsme použili větu o limitě složeného zobrazení[1] a základní limitu.

(1.e) Najděte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$.

Řešení: Nejprve si všimněme, že funkce je definovaná jen pro $x^2 \neq y^2 \Leftrightarrow |x| \neq |y|$. Limitu tedy uvažujeme pro $(x,y) \to (0,0)$, ale jen pro ta (x,y), která splňují $|x| \neq |y|$.

Pokud se blížíme k počátku po osách x, y, tak vyjdou obě limity rovné nule. Uvažme ještě funkci $y(x) = x + x^5$. Pro $x > 0$ platí $x < x + x^5$ a tedy graf funkce $y(x) = x + x^5$ leží pro $x > 0$ v definičním oboru funkce $\frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$. Pak ale máme

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^6+y^6(x)}{x^2-y^2(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^6+(x+x^5)^6}{x^2-(x+x^5)^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x^6+O(x^7)}{-2x^6+O(x^7)} = -2.$$

Vidíme, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$$

neexistuje.

(1.f) Najděte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Řešení: Na přímce $y = x$ platí $\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$. Blížíme-li se k počátku po této přímce, pak vyjde limita 1. Zvolíme-li přímku $y = -x$, pak $\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$ a tedy limita podél této přímky pro $(x,y) \to (0,0)$ vyjde -1. Jelikož se tyto limity nerovnají, pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

neexistuje.

[1] Podrobnější zdůvodnění bylo na cvičení.

(4) Najděte směrovou derivaci funkce z (1.e), kterou v počátku dodefinujeme nulou, v obecném směru $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ v počátku.

Řešení: Úloha dává smysl jen pro vektory $\mathbf{x} := (u, v),\ u^2 + v^2 = 1$, kde $|u| \neq |v|$. Vyloučíme-li tyto čtyři směry, pak z definice máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t(u,v)\big) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(tu, tv\big)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^6(u^6 + v^6)}{t^3(u^2 - v^2)} = 0.
\end{aligned}$$

(5) Spočtěte definiční obor a první parciální derivace funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{xy}$.

Řešení: Definiční obor je $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} e^{xy\ln(x^2+y^2)} \\
&= e^{xy\ln(x^2+y^2)} \frac{\partial}{\partial x}(xy\ln(x^2 + y^2)) \\
&= (x^2 + y^2)^{xy}(y\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}), \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)^{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{xy\ln(x^2+y^2)} \\
&= e^{xy\ln(x^2+y^2)} \frac{\partial}{\partial y}(xy\ln(x^2 + y^2)) \\
&= (x^2 + y^2)^{xy}(x\ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}).
\end{aligned}$$