Řešení dú
8. sada

3.d) Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}. \tag{1}$$

Řešení 1. *Z přednášky víme, že* $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$. *Tudíž dle nápovědy:*

$$\begin{aligned}
(1+x)e^{-x} - (1-x)e^x &= (1+x)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} - (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k + (-1)^k x^{k+1} - x^k + x^{k+1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k - x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1} + (-1)^k x^{k+1}}{k!} \\
&= -2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-2+4k+2}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

Odsud pak dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{4}\big((1+x)e^{-x} - (1-x)e^x\big)|_{x=1} \\
&= \frac{1}{4}(2e^{-1}) = \frac{1}{2e}.
\end{aligned}$$