Řešení vybraných úloh
5. sada

1.c) Nalezněte obecná řešení rovnice

(1) $$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

Řešení: Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

jsou $\lambda = \pm 1$. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice má tedy tvar

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice (1). Nejprve studejme řešení rovnice

(2) $$y'' - y = 2e^x.$$

Ta má pravou stranu ve speciálním tvaru. Jelikož e^x je řešením homogenní rovnice (neboli 1 je kořen charakteristické rovnice), řešení (2) můžeme hledat ve tvaru $y_{p_1}(x) = axe^x,\ a \in \mathbb{R}$. Dosazením do levé strany (2) zjistíme, že

$$(axe^x)'' - axe^x = (ae^x + axe^x)' - axe^x = (2ae^x + axe^x) - axe^x = 2ae^x,$$

tudíž $a = 1$.

Zbývá najít partikulární řešení y_{p_2} rovnice

(3) $$y'' - y = -x^2.$$

Pravá strana nemá speciální tvar. Řešení budeme hledat metodou variace konstant, tj. řešení (3) hledáme ve tvaru $y_{p_2}(x) = u(x)e^x + v(x)e^{-x}$, kde $u(x), v(x)$ jsou neznámé funkce, o kterých navíc předpokládáme, že

$$u'(x)e^x + v'(x)e^{-x} = 0.$$

Pak u, v řeší soustavu diferenciálních rovnic

(4) $$\begin{aligned} u'(x)e^x + v'(x)e^{-x} &= 0, \\ u'(x)e^x - v'(x)e^{-x} &= -x^2, \end{aligned}$$

kterou můžeme pomocí matic přepsat jako

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice 2×2 je -2, Cramerovo pravidlo tedy dává

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ -x^2 & -e^{-x} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} x^2 e^{-x} \\ v'(x) &= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & -x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x^2 e^x. \end{aligned}$$

Integrací dostaneme (integrační konstanty můžeme volit libovolně, např. 0)

$$u(x) = e^{-x}\Big(\frac{x^2}{2} + x + 1\Big),\ v(x) = e^x\Big(\frac{x^2}{2} - x + 1\Big),$$

a tedy

$$y_{p_2}(x) = u(x)e^x + v(x)e^{-x} = x^2 + 2.$$

Celkově je tedy každé řešení (1) tvaru

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$