Řešení dú
5. sada

1.e) Nalezněte obecná řešení rovnice

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^x \sin^2 x. \tag{1}$$

Řešení: Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$$

jsou $\lambda = -5$ a $\lambda = 1$. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice má tedy tvar

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice (1). Nejprve studejme řešení rovnice

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^x \sin^2 x = e^x(1 - \cos 2x) = e^x - e^x \cos 2x. \tag{2}$$

Hledejme zvlášť řešení pro pravou stranu $f_1(x) = e^x$ a $f_2(x) = -e^x \cos 2x$. Tyto pravé strany jsou ve speciálním tvaru. Jelikož e^x je řešením homogenní rovnice (neboli 1 je kořen charakteristické rovnice), řešení (2) můžeme hledat ve tvaru $y_1(x) = axe^x, \ a \in \mathbb{R}$. Dosazením do levé strany (2) zjistíme, že

$$(axe^x)'' + 4(axe^x)' - 5axe^x = e^x(ax + 2a + 4ax + 4a - 5ax) = 6ae^x \Rightarrow a = \frac{1}{6}.$$

tudíž $a = 1$. Zbývá najít partikulární řešení y_{p_2} rovnice

$$y'' - y = -e^x \cos 2x. \tag{3}$$

Pravá strana má opět speciální tvar a řešení můžeme hledat ve tvaru $y_2(x) = e^x(b \cos 2x + c \sin 2x)$ pro neznámé $b, c \in \mathbb{R}$. Dosazením do levé strany dostaneme:

$$\begin{aligned}
y_2' &= e^x(b \cos 2x + c \sin 2x - 2b \sin 2x + 2c \cos x) \\
&= e^x\big((b + 2c) \cos 2x + (c - 2b) \sin 2x\big) \\
y_2'' &= e^x\big((b + 2c) \cos 2x + (c - 2b) \sin 2x - 2(b + 2c) \sin 2x + 2(c - 2b) \cos 2x\big) \\
&= e^x\big((-3b + 4c) \cos 2x + (-3c - 4b) \sin 2x\big) \\
y_2'' + 4y_2' - 5y_2 &= e^x\big((-3b + 4c + 4b + 8c - 5b) \cos(2x) + (-3c - 4b + 4c - 8b - 5c) \sin(2x)\big) \\
&= e^x\big((-4b + 12c) \cos(2x) + (-4c - 12b) \sin(2x)\big).
\end{aligned}$$

Máme:

$$\begin{aligned}
-4b + 12c &= -1 \\
-4c - 12b &= 0 \\
c &= -3b \\
b &= \frac{1}{40}, \ c = -\frac{3}{40}.
\end{aligned}$$

Řešení je tvaru:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-5x} + e^x\left(\frac{1}{40} \cos 2x - \frac{3}{40} \sin 2x + \frac{x}{6}\right)$$