Řešení vybraných příkladů
3. sada

1.a) Najděte všechna maximální řešení rovnice

(1) $$xy' = 2y.$$

Řešení: Rovnice (1) degeneruje v bodě $x = 0$. Je-li $y(x)$ řešením, které je definované v nule, pak $2y(0) = 0.y'(0) = 0$, tj. y prochází počátkem. Dále vidíme, že funkce $y(x) = 0$ je stacionární řešení rovnice. Další stacionární řešení nejsou.

Dále můžeme předpokládat, že $x \neq 0$. Pak můžeme rovnici (1) přepsat do tvaru rovnice v separovaných proměnných

(2) $$y' = \frac{2y}{x}.$$

Jestliže navíc $y \neq 0$ a potom můžeme rovnici (1) přepsat do tvaru:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Pak standardními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c_1,\ 2\int \frac{dx}{x} &= 2\ln|x| + c_2 \\ \ln|y(x)| &= 2\ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\ |y(x)| &= e^c|x^2| = e^c x^2 \\ y(x) &= \alpha x^2,\ \ \alpha = \pm e^c. \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce $y(x) = \alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, jsou maximální řešení rovnice (1).

Zbývá ale rozhodnout, zda to jsou všechna řešení, přitom vidíme, že navazovat řešení lze pouze v počátku, kde rovnice degeneruje. Definujme funkce

(3) $$y_{\alpha_1,\alpha_2}(x) = \begin{cases} \alpha_1 x^2, & x < 0, \\ \alpha_2 x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné. Je snadné ověřit, že $y_{\alpha_1,\alpha_2} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pro $x \neq 0$ to plyne přímo z definice zatímco spojitost derivace v nule se musí zkontrolovat z definice. (Na druhou stranu tato funkce nemá druhou derivaci v nule, pokud $\alpha_1 \neq \alpha_2$.)

Je jednoduché zkontrolovat, že y_{α_1,α_2} řeší (1) na $\mathbb{R}$, je to tedy nutně maximální řešení. Na druhou stranu, je-li y libovolné řešení (1), pak existují $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tak, že $y|_{(-\infty,0)}(x) = \alpha_1 x^2,\ y|_{(0,+\infty)}(x) = \alpha_2 x^2$. Ze spojitosti y v nule plyne, že $y = y_{\alpha_1,\alpha_2}$.

Závěr: Všechna maximální řešení (1) jsou tvaru jako v (3), kde α_1, α_2 probíhá $\mathbb{R}$.

2.b) Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice

(4) $$xy' - y = 0?$$

Řešení: Je-li y řešením $xy' - y = 0$, pak $y(0) = 0y'(0) = 0$, tj. y prochází počátkem. Dále můžeme předpokládat, že $x \neq 0$. Pak můžeme rovnici (4) přepsat do tvaru

(5) $$y' = \frac{y}{x}.$$

Vidíme, že funkce $y(x) = 0$ je stacionární řešení rovnice. Další stacionární řešení zřejmě rovnice nemá. Dále můžeme předpokládat, že $y \neq 0$ a potom můžeme rovnici (5) přepsat do tvaru:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}.$$

Pak standardními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \ln|x| + c,\ \ c \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^c|x| \\ y &= ax,\ \ a = \pm e^c. \end{aligned}$$

Vidíme, že lineární funkce $y = ax,\ \ a \neq 0$, jsou nestacionární řešení rovnice (5), a to na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$. Další nestacionární řešení nejsou. Navíc bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, kde $x_0 \neq 0$, prochází právě jedno řešení, a to $y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Z předešlé diskuze je patrné, že přímky $y = ax,\ \ a \in \mathbb{R}$, jsou všechna řešením původní rovnice (4), a to na celém $\mathbb{R}$. Každé takové řešení je jednoznačně určené svou hodnotou v libovolném bodě $x_0 \neq 0$.

Závěr: Počátkem prochází nekonečně mnoho řešení (4), dále body $(0, y)$, kde $y \neq 0$, neprochází ani jedno řešení a ostatními body v rovině prochází právě jedno řešení (4).

(2.c) Najděte křivky, pro které platí, že úsečka, ležící na tečně této křivky s krajními body na souřadných osách, má střed v bodě dotyku. Napište rovnici křivky, která prochází bodem (2,3).

Řešení: Nechť graf funkce $y = y(x)$ je řešení úlohy. Ze symetrie úlohy stačí nejprve uvažovat řešení, která leží v prvním kvadrantu. Dle předpokladu má funkce y derivaci v bodě $x_0 > 0$ a tečna ke grafu funkce v bodě $(x_0, y(x_0))$ je tvaru

$$T(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0). \tag{6}$$

Označme jako $(a, 0)$, resp. $(b, 0)$ průsečík T s osou x, resp. y. Pak musí platit

$$\begin{aligned} 0 = T(a) &= y'(x_0)(a - x_0) + y(x_0), \\ b = T(0) &= y'(x_0)(-x_0) + y(x_0). \end{aligned}$$

Ze zadání zároveň plyne, že $b = 2y(x_0),\ \ a = 2x_0$. (Nakreslete si obrázek.) Máme tedy:

$$\begin{aligned} 0 &= y'(x_0)(x_0) + y(x_0), \\ y(x_0) &= y'(x_0)(-x_0). \end{aligned}$$

Jelikož $x_0 > 0$ je libovolný bod, odvodili jsme, že y řeší ODR 1. řádu v separovaném tvaru

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Zbývá tuto ODR vyřešit. Standardním postupem získáme

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + c \\ |y| &= \frac{e^c}{|x|} \\ y &= \frac{a}{x},\ \ a = \pm e^c. \end{aligned}$$

Má-li graf funkce y ležet v 1. kvadrantu, pak nutně $a > 0$. Celkem ale vidíme, že všechna řešení původní úlohy jsou tvaru

$$y = \frac{a}{x},\ \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a to na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$. Konečně má-li platit $y(2) = 3$, pak $a = \frac{3}{2}$.

3.a) Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$xy' = x + 2y. \tag{7}$$

Řešení: Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu. Rovnice degeneruje v bodě $x = 0$. Dále si všimneme, že z (7) plyne $y(0) = 0$, tj. každé řešení, které je definované v nule, prochází počátkem. Je-li $x \neq 0$, pak můžeme vydělit x a získáme rovnici

$$y' = \frac{x + 2y}{x}. \tag{8}$$

Zavedeme $z = \frac{y}{x}$, pak (8) přejde na rovnici v separovaných proměnných

$$z'x + z = 1 + 2z$$

(9) $$z' = \frac{1+z}{x}.$$

Vidíme, že $z = -1$ je stacionární řešení, tj. $y(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$. Pro $z \neq -1$ platí

$$\int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| + c_1, \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_2.$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \ln|1+z| &= \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R} \\ |1+z(x)| &= |x|e^c \\ z(x) &= \pm e^c x - 1 \\ \frac{y(x)}{x} &= \alpha x - 1,\ \alpha = \pm e^c \\ y(x) &= \alpha x^2 - x. \end{aligned}$$

Jako v předchozím příkladě vidíme, že tato řešení můžeme slepovat v počátku. Budeme-li argumentovat stejně jako na konci předchozího příkladu, pak dostaneme následující:

Závěr: Všechna maximální řešení (7) jsou tvaru

(10) $$y(x) = y_{\alpha_1,\alpha_2}(x) - x,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2,$$

kde y_{α_1,α_2} jsou definovány v (3).

3.b) Najděte všechna maximální řešení

(11) $$y' = \frac{y}{x} - \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$$

Řešení: Jedná se o homogenní rovnici 1. řádu, kterou řešíme na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Zavedeme $z = \frac{y}{x}$, pak (11) přejde na rovnici v separovaných proměnných

(12) $$z'x + z = z - e^z$$

$$z' = -\frac{e^z}{x}.$$

Tato rovnice nemá žádná stacionární řešení. Dále

$$-\int \frac{dz}{e^z} = e^{-z} + c_1, \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_2.$$

Řešení (12) tedy vyhovuje vztahu

$$e^{-z(x)} = \ln|x| + c.$$

Levá strana je > 0 a tedy

$$\ln|x| > -c \Leftrightarrow |x| > e^{-c} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -e^{-c}) \ \vee\ x \in (e^{-c}, +\infty).$$

Dále počítejme

$$\begin{aligned} e^{-z(x)} &= \ln|x| + c \\ -z(x) &= \ln(c + \ln|x|) \\ y(x) &= -x\ln(c + \ln|x|). \end{aligned}$$

Závěr: Maximální řešení (11) jsou tvaru

(13) $$y(x) = -x\ln(c + \ln|x|), \quad x \in (-\infty, -e^{-c}) \ \vee\ x \in (e^{-c}, +\infty),\ c \in \mathbb{R}.$$