Matematická analýza pro fyziky II
LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 11

Funkce více proměnných

Parciální derivace

V následujících příkladech zjistěte, kde jsou funkce definované, spojité, kde mají parciální derivace 1. řádu a kde jsou spojité 1. parciální derivace

1. a) $f(x,y) = \ln(x+y)$
   b) $f(x,y,z) = \cos x \cosh y$
   c) $f(x,y) = |x||y|$
   d) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
   e) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5+y^5}$
   f) $f(x,y,x) = x^{\frac{y}{z}}$.

2. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$

   parciální derivace 1. řádu v bodě $(0,0)$?

3. Spočtěte parciální derivace 2. řádu a zjistěte, zda jsou záměnné

   a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$
   b) $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$
   c) ♠ $f(x,y) = x\sin(x+y)$ (1 bod)
   d) $f(x,y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}$
   e) $f(x,y,z) = x^{y^z}$
   f) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$
   g) $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
   (Uvažujte bod (0,0).)

4. Spočtěte derivaci funkce $x^2 - y^2$ v bodě (1,1) ve směru jednotkového vektoru, který svírá s kladným směrem osy x úhel $\frac{\pi}{3}$.

5. Najděte jednotkový vektor, v jehož směru má derivace $x^2 - xy + y^2$ v bodě (1,1) největší, nejmenší a nulovou hodnotu.

6. Spočtěte $\frac{\partial F}{\partial u}$, kde $F = f(g)$, $f(x,y,z)$ je daná funkce a $g_1(u,v) = (u^2-1)/2v$, $g_2(u,v) = (u+v)/(u-v)$, $g_3(u,v) = u^2 - v^2$.

7. Nechť $f(s,t)$ je hladká nezáporná funkce na $\mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace 1. řádu funkce $g(x,y) = f(x,y)^{f(y,x)}$ pomocí hodnot f a jejich parciálních derivací.

Totální diferenciál

V následujících příkladech zjistěte, kde má funkce pariální derivace, kde jsou spojité a kde má totální diferenciál. Určete ho

8.
a) $f(x,y) = \ln(x+y)$
b) $f(x,y,z) = \cos x \cosh y$
c) $f(x,y) = |x||y|$
d) ♣ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$
e) ♣ $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$
f) $f(x,y,x) = x^{\frac{y}{z}}$.

9. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro jaké hodnoty α bude mít funkce

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

totální diferenciál 1. řádu v bodě $(0,0)$?

10. Nechť f má totální diferenciál v bodě (1,1) a $g(t,u) = f(f(u,t), f(t,u))$. Vypočtěte $\frac{\partial g}{\partial x_1}(1,1)$, je-li $f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 2$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.