Matematická analýza pro fyziky II
LS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 9

METRICKÉ PROSTORY, TOPOLOGIE $\mathbb{R}^n$

(1) Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako

a) vzdálenost na mapě

b) nejkratší vzdálenost jízdy autem

c) cena jízdenky ČD.

Jde v těchto případech o metriku? (Pro případy b) a c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)

(2) Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.

a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$

b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$

c) Množina l_∞ všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_n |x_n - y_n|$.

(3) V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí

a) ♣ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \mathrm{D}(x),\ x \in [0,1]$ (Dirichletova funkce).

Řešení: a) $\{(x, f(x)) :\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{(0,t) :\ t \in [-1,1]\}$,
b) $\{(x,0) :\ x \in [0,1]\} \cup \{(x,1) :\ x \in [0,1]\}$.

(4) Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin

a) ♣ Množina M všech racionálních čísel z intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$

b) ♣ Množina M všech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti $x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0$

c) Množina M všech $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnosti $|z| < x^2 + y^2 \leq 1$

d) $M = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

e) Uzavřený jednotkový kruh K se středem v počátku bez úsečky $I = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Řešení: a) $M^o = \emptyset,\ \bar{M} = \partial M = [0,1]$,
b) $M^o = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\},\ \bar{M} = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$,
$\partial M = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) :\ |x| \leq 1,\ y = 0\}$,
c) $M^o = \{(x,y,z) : |z| < x^2 + y^2 < 1\},\ \bar{M} = \{(x,y,z) : |z| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$\partial M = \{(x,y,z) : |z| = x^2 + y^2 \leq 1\}$,
d) $M^o = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\},\ \bar{M} = \mathbb{R},\ \partial M = \{0, \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$,
e) $M^o = K^o \setminus I,\ \bar{M} = K,\ \partial M = \partial K \cup I$, kde $M = K \setminus I$.

(5) Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené

a) Množina všech $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

b) Množina všech $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost $1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

Řešení: a) otevřená, není uzavřená b) není otevřená ani uzavřená

(6) Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in \mathbb{R}$)

$$M_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (|x| + |y|)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)} \le t\}.$$

(7) ♣ Je množina

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2 \le xyz < 4\}$$

omezená?

(8) Dokažte omezenost množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

(9) Dokažte konvexitu množiny

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; |x| + \mathrm{e}^y < \mathrm{e}, x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$$

(10) Dokažte souvislost množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + |\operatorname{arctg} x| + y^2\mathrm{e}^{|y|} = 2\}.$$

(11) Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

(12) Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Ukažte, že $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

(13) Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$ pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte

a) ♣$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)

b) ♣$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

c) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$ (disjunktně)

d) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A

e) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A

f) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A

g) $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A$, $x_n \to x_0$

h) ♣$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

i) Platí analogické tvrzení pro průnik?

j) Je-li $F : X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.