

Funkce více proměnných

Obyčejné diferenciální rovnice

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu

Nalezněte obecná řešení rovnic. Pokud nejsou ve tvaru totálního diferenciálu, hledejte vhodný integrační faktor

- $2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0$
 - $e^{-y} \, dx - (2y + xe^{-y}) \, dy = 0$
 - $\frac{3x^2+y^2}{y^2} \, dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} \, dy = 0$
 - $\clubsuit(x^2 + y) \, dx - x \, dy = 0, \quad \mu = \mu(x)$
 - $(xy^2 + y) \, dx - x \, dy = 0, \quad \mu = \mu(y)$
 - $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3) \, dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3) \, dy = 0, \quad \mu = \mu(x + y)$
 - $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0, \quad \mu = \mu(xy).$

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

- $x^2 + y^2; \quad x^2 - y^2; \quad -x^2 - y^2$
- $\clubsuit x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
- $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
- $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)e^{x+y}$
- $f(x) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- $x + y + 4 \cos x \cos y$
- $\spadesuit \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ (1 bod)
- $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
- $(ax + by + cz)e^{-x^2 - y^2 - z^2}.$

Implicitní funkce

12. ♣ Dokažte, že existuje okolí V bodu $(1, 1)$ takové, že množina $\{(x, y); x^3 + y^3 - 2xy = 0\} \cap V$ je grafem nějaké funkce, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.
13. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(3, -2, 2)$ takové, že množina $\{(x, y, z); z^3 - xz + y = 0\} \cap V$ je grafem nějaké funkce, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(3, -2)$. Spočtěte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2)$.
14. ♣ Spočtěte parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.
15. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce dané vztahem $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$.
16. Jsou-li $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$ implicitně zadány vztahem $F(x, y, z) = 0$, ukažte, že $f_y g_z h_x = -1$.
17. ♣ Napište du a dv , je-li $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$.
18. Hledejte lokální extrémy funkce $z = z(x, y)$, dané implicitně vztahem $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat na dalším cvičení jako domácí úkol.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.