Řešení vybraných příkladů
13. sada

(1.b) Najděte extrémy následujících funkcí vzhledem k příslušné vazbě.

$$f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad x^2+y^2=1,\ a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Řešení: Jednotková kružnice $\{(x,y):\ x^2+y^2-1\}$ je kompaktní. Dále funkce f je spojitá a nabývá tedy na K svého maxima i minima. Položme $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g(x,y)=x^2+y^2-1$.

Nyní spočteme gradienty

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right),\quad \nabla g(x,y)=(2x,2y).$$

Podle věty o Lagrangeových multiplikátorech musí v bodě extrému $(x_0,y_0)\in K$ platit

$$(\nabla f)(x_0,y_0)=\lambda(\nabla g)(x_0,y_0)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. To vede na soustavu lineárních rovnic:

$$2\lambda x_0=\frac{1}{a},\ 2\lambda y_0=\frac{1}{b}.$$

Vidíme, že nutně $x_0\neq 0$ a $y_0\neq 0$. Z první rovnice tedy plyne $\lambda=\frac{1}{2ax_0}$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme:

$$y_0=\frac{\lambda}{2b}=\frac{2ax_0}{2b}=\frac{ax_0}{b}.$$

Dále musí platit $x_0^2+y_0^2=1$ a tedy

$$1=x_0^2+\left(\frac{ax_0}{b}\right)^2=x_0^2(1+\frac{a^2}{b^2})=\frac{x_0^2}{b^2}(a^2+b^2)\Leftrightarrow x_0=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Označme

$$A:=\operatorname{sign}(ab)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Pak

$$\begin{aligned}f(\pm A)&=\frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\pm b}{a}+\frac{\pm a}{b}\right)\\&=\frac{\operatorname{sign}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\pm(b^2+a^2)}{ab}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{\pm 1}{|ab|}\right).\end{aligned}$$

Závěr: f se nabývá globálního maxima v bodě A a globálního minima v bodě $-A$.

(1.e) $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z;\quad x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x,y,z>0.$

Řešení: Funkce f má zřejmě následující symetrie:

$$f(x,y,z)=f(\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z))=f(x+2k_1\pi,y+2k_2\pi,z+2k_3\pi),$$

kde σ je libovolná permutace na třech prvcích a $k_i\in\mathbb{Z},\ i=1,2,3$. Dále na množině

$$M:=\{(x,y,z):\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x,y,z>0\}$$

platí $0<x,y,z<\frac{\pi}{2}$. Tudíž $0<f(x,y,z)<1$.

Množina M není kompaktní, neboť není uzavřená. Nicméně

$$\overline{M}:=\{(x,y,z):\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ x,y,z\geq 0\}$$

je kompaktní množina s hranicí

$$\partial M=\{(x,y,z):\ x+y+z=\frac{\pi}{2},\ xyz=0,\ x,y,z\geq 0\}.$$

Nejprve najdeme globální extrémy f na $\overline{M}$. Vidíme, že $f = 0$ na ∂M a $0 \le f(x, y, z) \le 1$ na $\overline{M}$. Jelikož $f > 0$ na M, pak nutně $0 = \inf_M f$ a tedy f se na M nenabývá globálního minima. Zbývá najít bod z $\overline{M}$, kde f nabývá globálního maxima. Jelikož $f > 0$ na M a $f = 0$ na ∂M, pak globální maximum musí ležet v M.

Položme $g(x, y, z) = x + y + z - \frac{\pi}{2}$. Máme:

$$\nabla f = (\cos x \sin y \sin z, \sin x \cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z), \ \nabla g = (1, 1, 1).$$

V bodě globálního extrému (x, y, z) tedy musí platit

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z &= \lambda, \\ \sin x \cos y \sin z &= \lambda, \\ \sin x \sin y \cos z &= \lambda, \end{aligned}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Víme, že pro $(x, y, z) \in M$ musí být výrazy

$$\sin x, \sin y, \sin z, \cos x, \cos y, \cos z$$

kladné. Z první a druhé rovnice dostaneme

$$\cos x \sin y = \sin x \cos y \Leftrightarrow \sin(x - y) = 0 \Leftrightarrow y - x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Z první a třetí rovnice dostaneme analogickým postupem $z - x = \ell\pi, \ \ell \in \mathbb{Z}$, a konečně z druhé a třetí rovnice plyne $z - y = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$. Celkem máme, že

$$y = x + k\pi, \ z = x + \ell\pi, \ k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož $\frac{\pi}{2} \ge x, y, z \ge 0$ na $\overline{M}$, pak nutně $x = y = z = \frac{\pi}{6}$. Více podezřelých bodů jsme nenašli, to znamená, že $((\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}))$ je bod maxima. Konečně $f((\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})) = (\sin \frac{\pi}{6})^3 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^3$.

(2.c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \ \ x^2 + y^2 \le 25.$

Řešení: Množina

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 25\}$$

je omezená a uzavřená. Jedná se tedy o kompaktní množinu. Zřejmě platí

$$K^o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 25\}, \ \ \partial K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 25\}.$$

Funkce f je spojitá na K a nabývá se tudíž na K svého maxima i minima. Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K, tj. na K^o.

Spočteme gradient

$$\nabla f(x, y) = (2x - 12, 2y + 16).$$

Vidíme, že $\nabla f = 0$ jen v bodě $(6, 8)$. Tento bod ale neleží v K^o. To znamená, že f se musí nabývat maxima a minima na hranici ∂K.

Platí

$$\partial K := \{(x, y) : \ g(x, y) = 0\}, \ \ g(x, y) = x^2 + y^2 - 25, \ \ \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Podle Lagrangeovy věty o vazaných extrémech musí v bodě extrému $(x_0, y_0) \in \partial K$ platit:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

To vede na soustavu rovnic

$$2x - 12 = 2\lambda x, \ \ 2y + 16 = 2\lambda y.$$

Z první rovnice dostaneme $x \ne 0$ a $\lambda = \frac{x-6}{x} = 1 - \frac{6}{x}$. Dosadíme do druhé rovnice a získáme

$$y + 8 = y - \frac{6y}{x} \Leftrightarrow 8x = -6y \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x.$$

Tento vztah dosadíme do vazby a dostaneme

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3, \ y = \mp 4.$$

Konečně

$$f(3, -4) = -75, \ \ f(-3, 4) = 125.$$

Závěr: f nabývá maxima v bodě $(-3, 4)$ a maxima v bodě $(3, -4)$.

(2.d) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$

Řešení: Množina

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

je omezená a uzavřená. Je tedy kompaktní. Dále platí

$$K^o = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < z < 1\},$$
$$\partial K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z = 1 \ \vee \ x^2 + y^2 = z \leq 1\}.$$

Funkce f je spojitá na K a nabývá se tudíž na K svého maxima i minima.

Nejprve najdeme podezřelé body uvnitř K, tj. na K^o. Platí

$$\nabla f = (1,1,1).$$

Jelikož $\nabla f \neq 0$ na $\mathbb{R}^3$, pak v K^o neleží žádný podezřelý bod. Stačí tedy hledat extrémy na ∂K.

Hranici ∂K rozdělíme ještě na dvě části, a to na

$$\partial K_0 = \{(x,y,x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \ \text{ a } \ \partial K_1 = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Pak platí $\partial K = \partial K_0 \cup \partial K_1$ a obě množiny $\partial K_0, \ \partial K_1$ jsou kompaktní. Nejprve najdeme extrémy f na ∂K_0 a pak na ∂K_1. Pak tyto extrémy mezi sebou porovnáme. Ještě si všimneme, že

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1\} \tag{1}$$

je kružnice v $\mathbb{R}^3$.

Nyní najdeme extrémy f na ∂K_0. Definujme pomocnou funkci

$$g_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ g_0(x,y,z) = z - x^2 - y^2.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_0 := \{(x,y,x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_0(x,y,z) = 0, \ x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_0 = \lambda(-2x, -2y, 1).$$

To vede na soustavu rovnic

$$1 = -2\lambda x = -2\lambda y = \lambda.$$

Máme $\lambda = 1, \ x = y = -\frac{1}{2}$ a získali jsme podezřelý bod $A = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \partial K_0$. Ostatní podezřelé body na ∂K_0 musí ležet na kružnici (1) a tyto body najdeme později.

Analogicky postupujeme na ∂K_1. Definujme pomocnou funkci

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ g_0(x,y,z) = z - 1.$$

Jestliže extrém leží na podmnožině

$$H_1 := \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_1(x,y,z) = 0, \ x^2 + y^2 < 1\},$$

pak v takovém bodě musí platit:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 = \lambda(0,0,1).$$

Dostáváme soustavu rovnic $1 = 0, 1 = \lambda$, která nemá řesení. To znamená, že na H_1 žádný podezřelý bod není. Stačí najít podezřelé body na kružnici (1) a porovnat hodnoty v těchto bodech s $f(A)$.

Máme

$$\partial K_0 \cap \partial K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_0(x,y,z) = g_1(x,y,z) = 0\}.$$

V bodě extrému na této množině musí platit

$$\nabla f = \lambda_0 \nabla g_0 + \lambda_1 \nabla g_1, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, 1.$$

To vede na soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2x & 0 & 1 \\ -2y & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

pro neznámé λ_0 a λ_1. Tato soustava má řešení jen pro $x = y$. Jelikož musí platit $x^2 + y^2 = 1$, pak $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Celkem existují pouze tři podezřelé body:

$$A = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \pm B = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1).$$

Platí

$$f(A) = -\frac{1}{2},\ f(\pm B) = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Jelikož $1 - \sqrt{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{2}$, pak jsme ukázali

Závěr: f se nabývá maxima v bodě B a minima v bodě $-B$.