Řešení vybraných příkladů
Sada příkladů 12

Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu.

1.d) Nalezněte obecná řešení rovnice $xy' = x^2 + y$.

Nápověda: Převeďte na rovnici ve tvaru totálního diferenciálu pomocí integračního faktoru $\mu \equiv \mu(x)$.

Řešení: Jedná se sice o lineární rovnici 1. řádu, kterou už řešit umíme. Zkusíme ale jiný postup a rovnici převedeme do tvaru totálního diferenciálu. Rovnici nejprve převedeme formálními úpravami do tvaru

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + y$$
$$xdy = (x^2 + y)dx$$
$$(x^2 + y)dx - xdy = 0. \tag{1}$$

Hledáme funkci $f(x, y)$ tak, aby

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -x. \tag{2}$$

Z prvních parciálních derivací vidíme, že f je nekonečně diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$. Tudíž platí záměnost druhých parciálních derivací f. Jelikož

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1$$

pak f s předepsanými prvními parciálními derivacemi jako v (2) neexistuje.

Rovnici (1) zkusíme přenásobit integračním faktorem μ tak, aby příslušné rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu(x, y)(x^2 + y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = -x\mu(x, y). \tag{3}$$

byly ve tvaru totálního diferenciálu, tj. aby platila záměnnost druhých parciálních derivací. Z nápovědy víme, že můžeme předpokládat, že integrační faktor $\mu(x, y)$ závisí jen na x, tj. $\mu(x, y) \equiv \mu(x)$.

Pro řešení (3) bude platit záměnost druhých parciálních derivací, pokud

$$\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(x^2 + y)) = \frac{\partial}{\partial x}(-x\mu(x)) = -\mu(x) - x\mu'(x).$$

Integrační faktor $\mu(x)$ tedy řeší lineární rovnici 1. řádu

$$\mu'(x) + \frac{2\mu(x)}{x} = 0.$$

Integrační faktor této ODR je $e^{2\ln|x|} = x^2$, neboť $\int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln|x| + d = \ln x^2 + d, \ d \in \mathbb{R}, \ x \neq 0$. Pak

$$(x^2\mu(x))' = x^2\mu'(x) + 2x\mu(x) = 0 \quad \Rightarrow \ \mu(x) = \frac{c}{x^2}, \ c \in \mathbb{R}, \ x \neq 0.$$

Konstantu c můžeme zvolit libovolně. Pro $\mu(x) = x^{-2}$ přejde rovnice (3) na

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x}.$$

Vidíme, že parciální derivace jsou spojité mimo osu y. Funkci f budeme hledat zvlášť na polorovině $H_+ := \{(x, y) : \ x > 0\}$ a zvlášť na $H_- := \{(x, y) : \ x < 0\}$.

Na obou polorovinách nicméně funguje následující postup:

$$f(x, v) = \int_0^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)dt + f(x, 0) = \int_0^v -\frac{1}{x}dt + f(x, 0) = \left[-\frac{t}{x}\right]_0^v + \varphi(x) = -\frac{v}{x} + \varphi(x),$$

kde $\varphi(x) = f(x, 0)$ je funkce jedné proměnné a $x \neq 0$. Jelikož má platit $\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + \frac{y}{x^2}$, pak nutně

$$\varphi(x) = f(x, 0) = x + e, \ e \in \mathbb{R}.$$

Ukázali jsme, že řešení (3) s integračním faktorem $\mu(x) = x^{-2}$ je nutně tvaru

$$f(x, y) = x - \frac{y}{x} + e$$

na H_+ i na H_-, kde $e \in \mathbb{R}$. Hledaná řešení původní úlohy jsou tedy implicitně zadaná rovnicí

$$0 = x - \frac{y}{x} + e.$$

Tato řešení lze slepit na ose y a řešení původní ulohy jsou tvaru:

$$y(x) = x^2 + xe,\ x \in \mathbb{R},\ e \in \mathbb{R}.$$

Lokální extrémy funkcí více proměnných. Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Řešení: Funkce f je polynom, má spojité všechny parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2) = 4x^3 - 2x - 2y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2) = 4y^3 - 2x - 2y.$$

Nyní musíme vyřešit soustavu dvou kubických rovnic

$$4x^3 - 2x - 2y = 0,\ 4y^3 - 2x - 2y = 0.$$

Je-li x, y řešením, pak nutně

$$0 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Jelikož $x^2 + y^2 + xy \geq 0$ a přitom rovnost nastává jen pro $x = y = 0$, pak druhá závorka se rovná nule jen pro $x = y = 0$, v tomto případě se ale nuluje už první závorka. Musí tedy nutně platit $x = y$ a tento vztah (nesmíme zapomenout) dosadit do původní soustavy. Pak $4x^3 - 2x - 2y = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Tedy $(0, 0), (-1, -1), (1, 1)$ jsou jediné body, kde f může mít lokální extrém.

- Nejprve spočteme příslušnou Hessovu matici v $(0, 0)$. Ta vyjde

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Jedná se evidentně o singulární matici, která určuje negativně semi-definitní bilineární formu. Funkce f může mít v počátku lokální maximum, to ale z Hessovy matice nejsme schopni určit.
  Vidíme ale, že $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ a tedy $f(x, -x) = 2x^4 > 0,\ x \neq 0$. Na druhou stranu $f(x, 0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$. Jedná se tedy o tzv. sedlový bod a f tedy nemá v počátku lokální extrém.
- Než začneme studovat chování f na okolí bodů $\pm(1, 1)$, tak si všimneme, že $f(x, y) = f(-x, -y)$. Odsud plyne, že má-li f lokální extrém v $(1, 1)$, pak má lokální extrém i v $(-1, -1)$ a navíc se musí jednat o extrém stejného typu. Stačí tedy počítat v bodě $(1, 1)$. Zde je Hessova matice tvaru

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

  Posloupnost hlavních minorů je $1, 10, 100 - 4 = 96$. Ze Sylvestreho kritéria plyne, že se jedná o pozitivně definitní matici a body $\pm(1, 1)$ jsou tedy lokální minima funkce f.

(6) $f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Řešení: Mimo bod $(0, 0)$ se jedná o nekonečněkrát diferencovatelnou funkci. Dále okamžitě vidíme, že $(0, 0)$ není lokální extrém, neboť

$$f(x, x) = x^2 \ln(2x^2) < 0,\ x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$f(x, -x) = -x^2 \ln(2x^2) > 0,\ x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Jedná se tedy o tzv. sedlový bod.

Mimo počátek můžeme postupovat jako v předchozím příkladě. Máme hledat řešení rovnic

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy\ln(x^2+y^2)) = y\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2x}{x^2+y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(xy\ln(x^2+y^2)) = x\ln(x^2+y^2) + xy\frac{2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Je-li $y=0$, pak první rovnice se nuluje a v druhé zbude $x\ln x^2 = 0$. Dostaneme nové podezřelé body $(\pm1,0)$. Analogicky pro $x=0$, dostaneme podezřelé body $(0,\pm1)$. Tyto body můžeme ale rovnou vyloučit, neboť $f(1,0)=0$ a $f(1,y)>0$ pro $y>0$ a $f(1,y)<0$ pro $y<0$. Analogicky pro ostatní body $(-1,0)$ a $(0,\pm1)$.
Je-li $xy\neq 0$, pak můžeme vydělit první rovnici y, druhou x a dostaneme rovnice

$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0,$$
$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Tudíž

$$\frac{2y^2}{x^2+y^2} = \frac{2y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Je-li $x=\pm y$, pak

$$0 = \ln(2x^2) + \frac{2x^2}{2x^2} = \ln(2x^2)+1,$$

a tedy dostáváme další podezřelé body

$$(\pm\sqrt{\frac{1}{2e}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2e}}),$$

přitom znaménka mohou být libovolná.
Abychom nemuseli každý bod probírat zvlášť, tak si všimneme následující symetrie:

$$f(x,y) = f(-x,-y) = -f(x,-y) = f(-x,y).$$

Odsud plyne, že stačí zkoumat chování f v bodě $(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}})$. Vyjde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y(x^3+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x(y^3+3x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Je-li $x=y$, pak výrazy pro druhé derivace se výrazně zjednoduší a dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \ln(2x^2)+1.$$

Dosadíme-li navíc $(x,y) = (\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}})$, pak Hessova matice vyjde

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jedná se evidentně o positivně definitní matici a tedy f má v bodě $(\sqrt{\frac{1}{2e}}, \sqrt{\frac{1}{2e}})$ lokální minimum. To samé pak platí i pro bod $(-\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}})$. Naopak body $\pm(\sqrt{\frac{1}{2e}}, -\sqrt{\frac{1}{2e}})$ jsou lokální maxima.

12. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(1,1)$ takové, že množina

$$\{(x,y):\ x^3+y^3-2xy=0\}\cap V$$

je grafem nějaké funkce $y=y(x)$, která je třídy $\mathcal{C}^2$ na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $y'(1)$ a $y''(1)$.

Řešení: Označme $F(x,y) = x^3+y^3-2xy$. Pak F je nekonečně diferencovatelná funkce na $\mathbb{R}^2$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2-2x$. Jelikož $F(1,1)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1\neq 0$, z věty o implicitních funkcích plyne, že existuje $\varepsilon>0$ a právě jedna nekonečně diferencovatelná funkce

$$y: U_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\to\mathbb{R}$$

tak, že $y(1) = 1$ a $y = y(x) \Leftrightarrow F(x, y(x)) = 0$ pro každé $x \in U_\varepsilon(1)$. Z důkazu věty o implicitních funkcích plyne i existence okolí V, které splňuje požadavky ze zadání. (Detaily jsou ale přenechány čtenáři.)

Z věty o derivaci složené funkce plyne[1]:

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}(x)\\ &= 3x^2 - 2y(x) + (3y^2(x) - 2x)y'(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}F(x, y(x))\right) &= \frac{d}{dx}\big(3x^2 - 2y(x) + (3y^2(x) - 2x)y'(x)\big)\\ &= 6x - 2y'(x) + (6y(x)y'(x) - 2)y'(x) + (3y^2(x) - 2x)y''(x).\end{aligned}$$

Pro $1 = x = y(1)$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= 3 - 2 + (3 - 2)y'(1) = 1 + y'(1),\\ 0 &= 6 - 2y'(x) + (6y'(x) - 2)y'(x) + (3y^2(x) - 2)y''(x).\end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $y'(1) = -1$. Dosazením do druhé pak máme $y''(1) = -16$.

14. Spočtěte parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem $x + y + z = \mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.

Řešení: Označme $F(x, y, z) = e^{-(x+y+z)} - (x + y + z)$. Všimněte si, že

$$F(x, y, z) = F(y, x, z) = F(z, y, x) = F(x, z, y) = F(y, z, x) = F(z, x, y),$$

tj. $F(x, y, z) = F(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(y))$, kde σ je libovolná permutace na množině $\{x, y, z\}$. Proměnné x, y, z jsou tedy zcela rovnocenné a můžeme si libovolně vybrat, které dvě proměnné vezmeme jako proměnné implicitně zadané funkce. Zvolme si třeba $z = z(x, y) \Leftrightarrow F(x, y, z(x, y)) = 0$.

Dále si všimněme, že $F(x, y, z) = 0$ může platit jen pro $x + y + z > 0$. Jelikož $e^{-t} < 1$ pro $t > 0$, pak máme i omezení shora $1 > x + y + z$. Dále

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -e^{-(x+y+z)} - 1 < -1.$$

Vidíme, že funkce $z \mapsto F(x, y, z)$ je klesající funkce a dále zjevně

$$\lim_{z \to \pm\infty} F(x, y, z) = \mp\infty,$$

kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je pevné. Odsud plyne, že $z(x, y)$ je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$, kde je nekonečně diferencovatelná a platí $-x - y < z(x, y) < 1 - x - y$.

První a druhé parciální derivace spočteme opět z věty o derivaci složené funkce. Máme

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y, z(x, y)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\\ &= -e^{-(x+y+z)} - 1 + (-e^{-(x+y+z)} - 1)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

Odsud máme $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -1$. Analogickým postupem dostaneme $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -1$. Jelikož obě první parciální derivace jsou konstantní, pak druhé parciální derivace jsou nutně nulové. (Ve skutečnosti nutně $z(x, y) = -x - y + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je jediné řešení rovnice $e^{-c} = c$. Graf implicitně zadané funkce je tedy afinní rovina v $\mathbb{R}^3$.)

17. Napište první parciální derivace funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$, které jsou implicitně zadané rovnicemi

$$u + v = x + y, \quad \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}.$$

Řešení: Ze zadání plyne, že úlohu má smysl uvažovat jen pro $y \neq 0$ a $v \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Položme

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, u, v) = \left(u + v - x - y, \frac{\sin u}{\sin v} - \frac{x}{y}\right).$$

[1] Všimněte si, že x zde vystupuje jako proměnná funkce $y(x)$ a současně jako první proměnná funkce $F(x, y)$, což může vést k nepřehlednému zápisu. Pro lepší přehlednost je lepší si označit proměnnou funkce y jinak, třeba psát $y(t)$ místo $y(x)$. Běžne se však používá i tento méně přehledný zápis.

Označme ještě komponenty F jako F_1 a F_2, tj.

$$F_1(x,y,u,v) = (u+v-x-y), \quad F_2(x,y,u,v) = \left(\frac{\sin u}{\sin v} - \frac{x}{y}\right).$$

Z věty o implicitních funkcí plyne, že rovnice

$$0 = F_i(x,y,u(x,y),v(x,y)), \; i = 1,2,$$

jednoznačně určují funkce $u(x,y), v(x,y)$ proměnných x, y na okolí bodu $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ a platí

$$u_0 = u(x_0,y_0), \; v = v(x_0,y_0),$$

jestliže matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

je regulární. Předpokládejme tedy, že (4) je regulární. Nyní ukážeme, jak spočíst první parciální derivace funkcí u, v.

Z řetízkového pravidla plyne:

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{\partial}{\partial x} F_i(x,y,u(x,y),v(x,y)) = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 =& \frac{\partial}{\partial y} F_i(x,y,u(x,y),v(x,y)) = \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

kde $i = 1,2$. Tedy pro $i = 1,2$ platí

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_i}{\partial x} &= \frac{\partial F_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ -\frac{\partial F_i}{\partial y} &= \frac{\partial F_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tuto soustavu 4 rovnic pro 4 neznámé $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ můžeme přepsat do maticového tvaru:

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

To znamená

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\cos u}{\sin v} & -\frac{\sin u \cos u}{\sin^2 v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}.$$