Matematická analýza pro fyziky II
LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 11

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Parciální derivace a totální diferenciál. Zjistěte, kde jsou funkce definované, spojité, kde mají totální diferenciál, parciální derivace 1. řádu a kde jsou 1. parciální derivace spojité.

8.d) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

Řešení: Funkce $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy$ má spojité 1. parciální derivace (dokonce všechny parciální derivace jsou spojité). Funkce $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj. leží v $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. V bodě 0 má nevlastní derivaci $+\infty$. To znamená, že f je $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)| \; xy = 0\})$ a zde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{3(xy)^{\frac{2}{3}}}, \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{3(xy)^{\frac{2}{3}}}.$$

Totální diferenciál na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)| \; xy = 0\}$ je tudíž tvaru

$$\frac{1}{3(xy)^{\frac{2}{3}}} \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}.$$

Zbývá rozhodnout, zda f je $\mathcal{C}^1$ i na osách x a y a zda zde existuje totální diferenciál.

Jelikož $f = 0$ na ose x i na ose y, pak zřejmě platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0,$$

kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Na druhou stranu, z věty o limitě derivace plyne

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = +\infty, \; \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = +\infty,$$

kde $x_0, y_0 \neq 0$. Vidíme, že na osách x, y má f obě první derivace vlastní jen v počátku. Tudíž i totální diferenciál může existovat jen v počátku. Jelikož víme, že obě první parciální derivace v počátku jsou rovny nule, pak jediný kandidát na totální diferenciál je nulová matice. Jelikož

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0) + (x, y)) - f(0,0)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((x, y))}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

neexistuje, stačí uvážit chování na osách $x, y, x = y$, pak totální diferenciál v počátku neexistuje.

Závěr: Funkce je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : \; xy = 0\}$, kde má i totální diferenciál. Dále $\partial f/\partial x$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : \; y \in \mathbb{R}\}$ a $\partial f/\partial y$ je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : \; x \in \mathbb{R}\}$. V počátku obě první parciální derivace existují, nejsou zde ale spojité. Jinde jsou obě první parciální derivace nevlastní. Na osách x a y nemá f totální diferenciál.

8.e) $f(x, y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

Řešení: Funkce $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^5+y^5$ má spojité 1. parciální derivace (dokonce všechny parciální derivace jsou spojité). Funkce $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tj. leží v $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. V bodě 0 má nevlastí derivaci $+\infty$. To znamená, že f je $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)| \; x^5 + y^5 = 0\})$ a zde platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4}{(x^5 + y^5)^{\frac{4}{5}}}, \; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^4}{(x^5 + y^5)^{\frac{4}{5}}}.$$

Totální diferenciál je zde tvaru

$$\frac{1}{(x^5 + y^5)^{\frac{4}{5}}} \begin{pmatrix} x^4 & y^4 \end{pmatrix}.$$

Nyní ještě pro úplnost vyřešíme rovnici $x^5 + y^5 = 0$. Platí

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

Tudíž pro $x = -y$ platí $x^5 + y^5 = 0$. Nyní ještě ukážeme, že toto jsou všechna řešení, z AG nerovnosti totiž dostaneme:

$$x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 \geq 2\sqrt{\frac{x^4x^2y^2}{4}} = |x^3y| \geq x^3y,$$
$$y^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 \geq 2\sqrt{\frac{y^4x^2y^2}{4}} = |xy^3| \geq xy^3,$$
$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 \geq \frac{1}{2}x^2y^2 \geq 0.$$

Je-li $xy \neq 0$, pak jsme ukázali $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > 0$. Je-li $x = 0$ nebo $y = 0$, pak $x^5 + y^5 = 0$, jen pro $x = y = 0$. Tuto možnost už ale máme zahrnutu. Tedy $\{(x, y)|\ x^5 + y^5 = 0\} = \{(x, y)|\ x = -y\}$.

Zbývá rozhodnout, zda f je $\mathcal{C}^1$ i na ose $x = -y$ a zda zde existuje totální diferenciál.

Jelikož f je spojitá, pak můžeme použít větu o limitě derivace a ihned vidíme, že f má na ose $x = -y$ mimo počátek nevlastní obě první parciální derivace. V počátku jsou obě první parciální derivace zřejmě rovné 1, neboť

$$\lim_{x\to 0} \frac{f((x,0)) - f((0,0))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{x^5}}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{f((0,y)) - f((0,0))}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[5]{y^5}}{y} = 1.$$

Jediný kandidát na totální diferenciál v $(0, 0)$ je tudíž matice $(1\ 1)$. Jelikož

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0) + (x,y)) - f(0,0) - (1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((x,y)) - (x+y)}{\|(x,y)\|}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[5]{x^5+y^5} - (x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

neexistuje, stačí uvážit chování na osách $x, y, x = y$ a $x = -y$, pak totální diferenciál v počátku neexistuje.

Závěr: Funkce je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) :\ x = -y\}$, kde má i totální diferenciál. V počátku má obě první parciální derivace rovné 1, ale totální diferenciál zde neexistuje. Jinde má funkce obě první parciální derivace nevlastní.