

**Matematická analýza pro fyziky II**  
**LS 2021/22, MFF UK**  
Sada příkladů 10

LIMITA A SPOJITOST FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

(1) Spočítejte následující limity

a) ♣  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

b) ♣  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$

c) ♣  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$

d) ♣  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

e) ♣  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + y^6}{x^2 - y^2}$

f) ♣  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

Řešení: a) 1, b) 0, c) 0, d) a, e) neexistuje, f) neexistuje.

(2) Ukažte, že pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

neexistuje.

(3) Ukažte, že pro funkci

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) \text{ a } \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x,y \neq 0} f(x, y) = 0.$$

(4) ♣ Najděte směrovou derivaci funkce z (1.e) kterou v počátku dodefinujeme nulou, v obecném směru  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  v počátku.

(5) ♣ Spočítejte definiční obor a první parciální derivace funkce  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{xy}$ .

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.