

Matematická analýza pro fyziky II

LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 8

MOCNINNÉ ŘADY

1. Určete poloměr konvergence daných mocninných řad a vyšetřete konvergenci na kružnici konvergence ($z \in \mathbb{C}$)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$

b) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{R}^+$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n, \quad a, b \in \mathbb{R}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$

e) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$

g) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}.$

Řešení: **a)** $R = 5$, KNA na $K_5(3) \setminus \{8\}$, v $\{8\}$ NK, **b)** pro $a < 0$ je $R = +\infty$, pro $a = 1$ je $R = 1$, pro $a > 0$ je $R = 0$, pro $a = 1$ na $K_1(0)$ NK, **c)** KNA, **d)** KNA, **e)** $R = 1$, pro $p > 1$ KA na $K_1(0)$, pro $0 \leq p \leq 1$ KNA na $K_1(0) \setminus \{1\}$, jinak na $K_1(0)$ NK, **f)** NK, **g)** $R = 2^p$, pro $p > 2$ KA na $K_{2^p}(0)$, pro $0 \leq p \leq 2$ KNA na $K_{2^p}(0) \setminus \{-2^p\}$

2. Sečtěte funkční řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$

b) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$

Řešení: **a)** $\frac{2x}{(1-x)^3}$, **b)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$

3. Sečtěte číselné řady

a) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

b) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

c) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

d) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

(1 bod)

e) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

f) ♣ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$

Řešení: **a)** $\ln 2$, **b)** $2e$, **c)** $\frac{\pi}{4}$, **e)** $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$, **f)** $1 - 2 \ln 2.$

Zkratky: $R \dots$ poloměr konvergence mocninné řady, $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$,

KA ... konverguje absolutně, KNA ... konverguje neabsolutně, NK ... nekonverguje

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

Nápověda: 3.c) Uvažujte $\arctan x$, 3.d) Uvažujte $(1+x)e^{-x} - (1-x)e^x.$

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.