

Matematická analýza pro fyziky II

LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 7

ČÍSELNÉ ŘADY

Číselné řady s obecnými členy. Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$

c) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

e) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$

i) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}), \quad k \in \mathbb{R}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

m) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100\sqrt{n}}$

q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}, 0 < x < \pi$

s) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\sin \frac{n\pi}{4} + n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$

d) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$

f) $\clubsuit \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

h) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \frac{1}{e^n}$

j) $\sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln \ln n}$

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln \ln n}$

n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$

r) $\spadesuit \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}, \quad p \in \mathbb{R} \quad (1 \text{ bod})$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p, \quad p \in \mathbb{R}.$

Řešení: **a)** KA, **b)** KA, **c)** KNA, **d)** KNA, **e)** KA pro každé $x \in \mathbb{R}$, **f)** NK, **g)** NK, **h)** NK, **i)** pro $k = 0$ KA, jinak KNA, **j)** KNA, **k)** KNA, **l)** KNA, **m)** KNA, **n)** KNA, **o)** KNA, **p)** KA pro $p > 1$, KNA pro $1 \geq p > 0$ a jinak NK, **q)** KA pro $p > 1$, KNA pro $1 \geq p > 0$ a jinak NK, **s)** KA pro $p > 1$, KNA pro $1 \geq p > 1/2$ a NK jinak, **t)** KA pro $p > 2$, KNA pro $2 \geq p > 0$ a jinak NK.

KA ... konverguje absolutně, KNA ... konverguje neabsolutně, NK ... nekonverguje

Příklady označené \spadesuit můžete odevzdávat jako domácí úkol.

Příklady označené \clubsuit jsou vyřešené na mých stránkách.