

# Matematická analýza pro fyziky II

LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 6

ČÍSELNÉ ŘADY

## Číselné řady s nezápornými členy. <sup>1</sup>

1. Nalezněte  $n$ -tý částečný součet a součet řady  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ .

Řešení:  $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ,  $+\infty$ .

2. Spočtěte

a) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{2^n}$ .

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a+nd)q^n$ ,  $a, d \in \mathbb{R}$ ,  $|q| < 1$ .

c) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ .

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ .

Zde pro  $x \in \mathbb{R}$  je  $[x] \in \mathbb{Z}$  určeno tím, aby platilo:  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Řešení: **a)**  $\frac{1}{5}$ , **b)**  $\frac{aq}{1-q} + \frac{dq}{(1-q)^2}$ , **c)**  $\frac{11}{18}$ , **d)** 1.

3. Na základě elementárních úvah rozhodněte zda řady konvergují či divergují

a) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ,

b) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ ,

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ .

Návod: Porovnejte s řadou **a)**  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} < +\infty$ , **b)** a **c)**  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ .

4. Použitím kritérií pro konvergenci řad s nezápornými členy rozhodněte o konvergenci či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

a) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \right)$

b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

c)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

d) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

e) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

f)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^\alpha} - 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$

h) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$

j) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n})^n}$

k)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}$

l)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ ,  $p \in \mathbb{R}$

m) ♣  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

n)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$

o)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$

p) ♣  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Řešení: **a)** K, **b)** K, **c)** D, **d)** D, **e)** K pro  $\alpha > 2$  a D jinak, **f)** K pro  $\alpha < -1$  a D jinak, **g)** K, **h)** K, **i)** K, **j)** K, **k)** K, **l)** K pro  $p > 1$  a jinak D, **m)** K pro  $p = 1, q > 1$  nebo  $p > 1$ , jinak D, **n)** K, **o)** K pro  $q > p$  nebo pro  $p \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$ , jinak D, **p)** K pro  $p > 2$  a D jinak.

K ... konverguje, D ... diverguje,  $\mathbb{Z}^{\leq 0} := \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat jako domácí úkol.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.

<sup>1</sup>Až na příklady 2.a), b).