Matematická analýza pro fyziky II
LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 4

Obyčejné diferenciální rovnice

Lineární rovnice 1. řádu.

1. Nalezněte obecná maximální řešení rovnic

a) ♣ $y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$

b) $y' - 2\frac{y}{x} = x^3$

c) $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$

d) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$

e) $xy' + y = \ln x + 1$

f) $(2\mathrm{e}^y - x)y' = 1$. (Hledejte řešení ve tvaru $x = x(y)$.)

g) ♣ Najděte maximální řešení rovnice

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

které je omezené pro $x \to \frac{\pi}{2}$.

Řešení: **a)** $y = \frac{x+c}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2},\ x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, **b)** $y = \frac{x^4}{2} + cx^2,\ x \in (-\infty, 0) \ \vee \ x \in (0, +\infty)$, **c)** $y = (x^2 + c)e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$, **d)** $y = \cos x + 1 + ce^{\cos x},\ x \in \mathbb{R}$, **e)** $y = \ln x + \frac{c}{x},\ x > 0$, **f)** $x = e^y + ce^{-y},\ y \in \mathbb{R}$.

Zde $c \in \mathbb{R}$.

Bernoulliho rovnice.

2. Nalezněte obecná maximální řešení rovnic

a) ♣ $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

b) $y' - 2xy = 2x^3y^2$

c) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}$

d) ♠ $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$ (1 bod)

e) $y' - xy = -y^3\mathrm{e}^{-x^2}$

f) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$.

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat na dalším cvičení jako domácí úkol.

Příklady označené ♣ jsou vyřešené na mých stránkách.