

## Matematická analýza pro fyziky II

LS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 2

### APLIKACE NEWTONOVA A RIEMANNOVA INTEGRÁLU

1. Spočítejte obsahy části rovin, omezené následujícími křivkami

a)  $y = x^2, x + y = 2$

b)  $y = 2^x, y = 2, x = 0$

c)  $y = |\ln x|, y = 0, x = 0, x = 10$

d)  $xy = 4, x + y = 5$

e)  $y = \ln x, y = \ln^2 x$ .

Řešení: **a)**  $\frac{9}{2}$ , **b)**  $2 - \frac{1}{\ln 2}$ , **c)**  $10 \ln 10 - 8$ , **d)**  $\frac{15}{2} - 4 \ln 4$ , **e)**  $2\sqrt{2}\pi$ ,

2. Nalezněte obsahy následujících podmnožin roviny:

a) vnitřek elipsy s poloosami  $a, b$ .

b) oblasti ohraničené kardioidou  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

c) oblasti ohraničené  $r = 4 \sin^2 \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

d) oblasti ohraničené  $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ .

Řešení: **a)**  $\pi ab$ , **b)**  $\frac{3\pi a^2}{2}$ , **c)**  $6\pi$ , **d)**  $\sqrt{2}\pi$ .

3. Rotační tělesa

a) Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.

b) Spočítejte objem tělesa vzniklého rotací oblouku kardioidy  $r = a(1 + \cos \varphi)$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$  kolem osy  $x$ .

c) Spočítejte objem části tělesa  $x^2 + 4y^2 \leq a^2$  ležícího mezi rovinami  $z = 0$  a  $y = z$ .

d) Odvoďte vzorec pro povrch koule.

e) Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky  $y = x^3, |x| \leq 1$  kolem osy  $x$ .

Řešení: **a)**  $\frac{4\pi r^3}{3}, \frac{\pi r^2 v}{3}, \frac{a^2 v}{3}$ , **b)**  $\frac{8\pi a^3}{3}$ , **c)**  $\frac{a^3}{6}$ , **d)**  $4\pi r^2$ , **e)**  $\frac{2}{27}\pi(10\sqrt{10} - 1)$ .

4. Délka křivek

a) Odvoďte vztah pro délku kružnice.

b) Spočítejte délku křivky  $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

c) Spočítejte délku evolventy kruhu  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a > 0$ .

Řešení: **a)**  $2\pi r$ , **b)** 4, **c)**  $2a\pi^2$ .

5. Výpočet těžiště a momentu setrvačnosti

a) Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru  $r$ .

b) Nalezněte polohu těžiště poloviny homogenní asteroidy  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, \pi]$ .

c) Nalezněte polohu těžiště homogenní polokoule  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x > 0$  a  $a > 0$ .

d) Určete moment setrvačnosti oblouku asteroidy (viz výše,  $t \in [0, \pi/2]$ ) vzhledem k souřadnicovým osám.

Řešení: **a)**  $[\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}]$ , **b)**  $[\frac{2}{5}a, 0]$ , **c)**  $[\frac{3a}{8}, 0, 0]$ , **d)**  $\mu a^2/8, \mu a^2/8$ .