

Matematická analýza pro fyziky II
LS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 1

NEWTONŮV A RIEMANNŮV INTEGRÁL

1. Spočtěte

a) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$

b) $\int_0^1 \arccos x \, dx$

c) $\int_0^\infty x^{2k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$

d) $\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} \, dx$

e) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx$

f) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$

g) $\int_0^\infty e^{-3x} \, dx$

h) $\int_0^1 x \ln x \, dx$

i) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) \, dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

Řešení: **a)** $2 - \frac{\pi}{2}$, **b)** 1, **c)** $2^{k-1}(k-1)!$, **d)** $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$, **e)** $2\sqrt{2}\pi$, **f)** $\frac{1}{2}$, **g)** $\frac{1}{3}$, **h)** $-\frac{1}{4}$, **i)** $\frac{a}{a^2+b^2}$, **j)** neexistuje vlastní.

2. Spočtěte integrál

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| \neq 1.$$

3. Zjistěte, zda konvergují integrály

a) $\int_0^\infty x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

b) $\int_1^\infty x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

c) $\int_0^{10} x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

d) $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \, dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \, dx$

f) $\int_0^2 \frac{1}{\ln x} \, dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x^p} \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

h) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$

Řešení: **a)** nikdy, **b)** pro $p < -1$, **c)** pro $p > -1$, **d)** ne, **e)** ano, **f)** ne, **g)** pro $p < 1$, **h)** ano