Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
První zápočtová písemka

9.11.

Pište pečlivě. Své kroky a odpovědi řádně zdůvodněte. Počítejte bez použití l'Hospitalova pravidla.

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16-x}-\sqrt{4+x}}{x}.$$

(2,5 bodů)

Řešení: Funkce $\frac{\sqrt[4]{16-x}-\sqrt{4+x}}{x}$ je definovaná na množině $\{x:\ 16 \geq x \geq -4,\ x \neq 0\}$, která obsahuje prstencovém okolí bodu nula $\mathcal{P}_4(0) = (-4,0)\cup(0,4)$ a má tedy smysl limitu počítat. Položme $A(x) = \sqrt[4]{16-x},\ B(x) = \sqrt{4+x}$, pak máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16-x}-\sqrt{4+x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{A(x)-B(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{A(x)-B(x)}{x} \frac{A^3(x)+A^2(x)B(x)+A(x)B^2(x)+B^3(x)}{A^3(x)+A^2(x)B(x)+A(x)B^2(x)+B^3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{A^4(x)-B^4(x)}{x} \frac{1}{A^3(x)+A^2(x)B(x)+A(x)B^2(x)+B^3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(16-x)-(4+x)^2}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{A^3(x)+A^2(x)B(x)+A(x)B^2(x)+B^3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(16-x)-(16+8x+x^2)}{x} \frac{1}{32} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-9x-x^2}{x} \frac{1}{32} = -\frac{9}{32}.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili větu o aritmetice limit, a to ve čtvrtém kroku.

(2)
$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{\tan^4 x}}$$

(3,5 bodů)

Řešení: Funkce $\left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{\tan^4 x}}$ je definovaná na množině

$$\{x:\ \cos(x^2) > 0,\ \tan x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\},$$

která obsahuje prstencovém okolí bodu nula $\mathcal{P}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}(0)$ a má tedy smysl limitu počítat. Dále z věty o limitě složené funkce víme, že

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(x^2)\right)^{\frac{1}{\tan^4 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos(x^2)}{\tan^4 x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{\tan^4 x}}.$$

Stačí tedy určit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{\tan^4 x}.$$

Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{\tan^4 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^4 x \, \ln\cos(x^2)}{\sin^4 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \cos^4 x \, \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} \, \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{\cos(x^2)-1} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} \quad \Bigg| \; y = x^2 \\
&= -\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu jsme použili větu o aritmetice limit, a to ve druhém kroku. Dále jsme potřebovali

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2)}{\cos x^2 - 1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\cos(x^2)-1)}{\cos x^2 - 1} \quad \Bigg| \; y = \cos x^2 - 1 \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1,
\end{aligned}$$

kde používáme větu o limitě složené funkce. Předpoklady věty jsou splněny, neboť funkce $y(x) = \cos(x^2) - 1$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum. Stejně tak nahlédneme, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} &= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \quad \Bigg| \; y = x^2 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Použití věty o limitě složené funkce je v pořádku, neboť funkce $y(x) = x^2$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum. Celková limita tedy vyjde $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.