Řešení DÚ
10. sada

Globální extrémy funkcí.

(d) Předpokládejme, že pata nadrže má souřadnice $(0,0)$ a že otvor ve stěně nádoby má souřadnice $(0,y)$. Toricelliho vzorec říká, že výtoková rychlost v v otvoru je dána vztahem $v = \sqrt{2(h-y)g}$, kde g je gravitační zrychlení a h je výška hladiny kapaliny. Trajektorie vytékající kapaliny, která protekla otvorem v čase $t=0$, je dána vodorovným vrhem $y(t) = y - \frac{1}{2}gt^2,\ x(t) = vt,\ t \geq 0$. Tudíž $y(t) = 0$ pro $t = \sqrt{2y/g}$ a tudíž kapalina dopadne v bodě

$$v\sqrt{2y/g} = \sqrt{2(h-y)g2y/g} = 2\sqrt{(h-y)y}.$$

Jelikož

$$\frac{d}{dy}(2\sqrt{(h-y)y}) = \frac{h-2y}{\sqrt{(h-y)y}},$$

funkce $2\sqrt{(h-y)y}$ proměnné y se nabývá maxima v bodě $y = \frac{h}{2}$.

(e) Předpokládejme, že nit je uchycena v bodech $(0,0)$ a (d,h). Nechť (x,y) jsou souřadnice hmotného bodu, který visí na niti. Jelikož nit je napnutá, pak máme $x^2+y^2 = \ell_1^2$, $(d-x)^2 + (y-h)^2 = \ell_2^2$ a $\ell_1 + \ell_2 = \ell$ je délka nitě. Odsud pak dostáváme

$$\begin{aligned}(d-x)^2 + (y-h)^2 &= (\ell - \ell_1)^2 = \ell^2 - 2\ell\ell_1 + \ell_1^2\\ &= \ell^2 - 2\ell\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2\\ d^2 - 2dx + h^2 - 2yh &= \ell^2 - 2\ell\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Ze zadání tedy plyne, že souřadnice hmotného bodu vyhovují vazbě:

$$F(x,y) = d^2 - 2dx + h^2 - 2yh - \ell^2 + 2\ell\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

Tímto způsobem je y implicitně zadána jako funkce proměnné x. Naším cílem je najít bod, ve kterém se funkce $y(x)$ nabývá svého globálního minima. Z náčrtku je zřejmé, že stačí uvažovat $x \in [0,d]$ a $y < 0$. Z derivace implicitně zadané funkce máme

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \frac{-2d + \ell\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-2h + \ell\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Předně jmenovatel je záporný a tudíž různý od nuly. Odsud

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow d\sqrt{x^2+y^2} = \ell x.$$

Umocněním dostáváme $y^2 = \frac{(\ell^2-d^2)x^2}{d^2}$ a tudíž $y = -\frac{x\sqrt{\ell^2-d^2}}{d}$. Dosazením za y do $F(x,y)$ dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= d^2 - 2dx + h^2 + 2h\frac{x\sqrt{\ell^2-d^2}}{d} - \ell^2 + \frac{2\ell^2 x}{d}\\ 0 &= d^2 + h^2 - \ell^2 + x(-2d + 2h\frac{\sqrt{\ell^2-d^2}}{d} + \frac{2\ell^2}{d})\\ x &= \frac{\ell^2 - d^2 - h^2}{-2d + 2h\frac{\sqrt{\ell^2-d^2}}{d} + \frac{2\ell^2}{d}} = \frac{d(\ell^2-d^2-h^2)}{2(\ell^2-d^2) + 2h\sqrt{\ell^2-d^2}}.\end{aligned}$$

Všimněte si, že $\ell^2 > d^2 + h^2$ a tudíž výraz napravo v poslední rovnici je kladný. Jednoduchou úpravou pak zjistíme, že $x \leq d$. Konečně

$$\begin{aligned}y &= -\frac{\sqrt{\ell^2-d^2}}{d}\frac{d(\ell^2-d^2-h^2)}{2(\ell^2-d^2) + 2h\sqrt{\ell^2-d^2}}\\ &= -\frac{(\ell^2-d^2-h^2)}{2\sqrt{\ell^2-d^2} + 2h}.\end{aligned}$$