

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK

Sada příkladů 12

Taylorův polynom. Taylorovy polynomy elementárních funkcí

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}), x \rightarrow 0$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}), x \rightarrow 0$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}), x \rightarrow 0$
- $(1+x)^a = 1 + ax + \binom{a}{2}x^2 + \dots + \binom{a}{n}x^n + O(x^{n+1}), x \rightarrow 0,$
kde $a \in \mathbb{R}$ a definujeme $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$

- (1) a) Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.
b) Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
c) Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \tan x$ stupně 5 v bodě 0.

Řešení: **a)** $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$, **b)** $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$, **c)** $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$

(2) Použitím Taylorova rozvoje spočtěte limity

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 0$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ |
| i) ♠ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0$ | (1 bod) |

Řešení: **a)** 2, **b)** $\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $-\frac{1}{12}$, **e)** $\ln^2 a$, **f)** $\frac{1}{3}$ **g)** 1, **h)** $\frac{2}{3}$

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat na dalším cvičení jako domácí úkol.