

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 8

LIMITY FUNKCÍ PODRUHÉ

Limity funkcí v nevlastních bodech.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0}, a_n \neq 0, A_m \neq 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3x^4 - 6x^2 + 5}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1})$

Řešení: **a)** $+\infty \cdot \text{sgn}(a_n A_m)$ pro $n > m$, a_n/A_m pro $n = m$ a 0 pro $m > n$, **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$, **c)** 1 , **d)** $\frac{2}{3}$

Limity funkcí l'Hospitalovým pravidlem.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

Řešení: **a)** 2 , **b)** $\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** 1 **e)** e^{-1}

Symboly O , o , \sim , \cong . Dokažte platnost následujících tvrzení

a) $\arctan x = O(1), x \rightarrow +\infty$

b) $x^2 e^{-x} = o(x^a), x \rightarrow +\infty, a < 0$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = O(\sqrt[8]{x}), x \rightarrow 0^+$

d) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cong \sqrt{x}, x \rightarrow +\infty$

Najděte reálné a , tak aby platilo

a) $\frac{1+x}{1+x^4} \sim x^a, x \rightarrow +\infty$

b) $e^x - \cos x \sim x^a, x \rightarrow 0$.

Řešení: **a)** $a = -3$, **b)** $a = 1$