

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
 Sada příkladů 7

Primitivní funkce II.

(1) Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

a) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$

b) $\int \frac{1}{(x^3+1)^2} dx$

(2) Vhodnou substitucí převedte integrály na integrály z racionálních funkcí a ty se pokuste vyřešit.

a) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$

b) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$

c) ♠ $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^3 x} dx$

(1 bod) d) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

e) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

(3) Nalezněte následující primitivní funkce

a) $\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

c) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx$

d) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx$

e) ♠ $\int \sqrt{a^2+x^2} dx, a > 0$ (1 bod)

Řešení: 1.a) $x - \frac{9}{2} \ln |2-x| + \frac{28}{3} \ln |3-x| + \frac{1}{6} \ln |x|,$

1.b) $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9} \ln |x+1| - \frac{1}{9} \ln |x^2-x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

2.a) $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x),$ 2.b) $\frac{\arctan\left(\frac{3 \tan(x/2)+1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}},$ 2.d) $\frac{-1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x},$ 2.e) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$

3.a) $-\frac{3}{2} \ln |\sqrt[6]{x}+1| - \frac{9}{4} \ln |2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}+1| + \ln |x| - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}\right),$

3.b) $\sqrt{x^2-2x+2} - \ln |1-x+\sqrt{(1-x)^2+1}|,$

3.c) $\sqrt{x^2+x+1} - \ln |2\sqrt{x^2+x+1}+x+2| + \frac{1}{2} \ln |2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}|,$

3.d) $-\frac{1}{18}(6x^2+10x+6-(6x+1)\sqrt{x^2+3x+2}) + \frac{3}{4} \ln |3+2x-2\sqrt{x^2+3x+2}| - \frac{16}{27} \ln |3x-3\sqrt{x^2+3x+2}+4|,$

Příklady označené ♠ můžete odevzdávat na dalším cvičení jako domácí úkol.

Příklad 3.e) můžete odevzdávat do 7.12.