Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 5

Spojitost funkcí. Značení

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(1) Dodefinujte funkci
$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
v bodě $x = 0$ tak, aby byla spojitá.

(2) Zjistěte body nespojitosti funkcí
a) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$
b) $\mathrm{sgn} \cos \frac{1}{x}$.

(3) Najděte body nespojitosti složených funkcí
a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$,
kde $f(x) = \mathrm{sgn}\ x$ a $g(x) = x(1-x^2)$.

(4) Zjistěte, zda jsou spojité funkce
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(5) Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce
a) $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$
b) $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$.
Nápověda: využijte vztah $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}((a+b) + |a-b|),\ a, b \in \mathbb{R}$ a odvoďte podobný vztah pro min.

(6) Uveďte příklad funkce nespojité v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$.

Výsledky: **(1)** $f(0) = \frac{1}{2}$, **(2) a)** $\{0\}$, **b)** $\{0, \frac{1}{\pi/2+k\pi} :\ k \in \mathbb{Z}\}$, **(3) a)** $-1, 0, 1$, **b)** $\emptyset$, **(4) a)** ne **b)** ano.

Derivace funkcí.

(1) Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

(2) Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ má funkce
$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
derivaci v bodě 0? Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

(3) Dokažte, že funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ je racionální}, \\ 0, & x \text{ je iracionální}. \end{cases}$$
má derivaci pouze v nule.

(4) Ukažte, že derivace sudé funkce (pokud existuje) je funkce lichá.

(5) Nechť
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1\,. \end{cases}$$
Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

(6) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ pro $x = -2$.

Výsledky: **(1)** ano, **(2)** $\alpha > 1$, **(5)** $a = 2, b = -1$, **(6)** tečna: $y = 5$, normála: $x = -2$.

Elementární funkce. Dokažte, že

a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

c) $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$

d) $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $|x| \geq 1$

e) $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

f) $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Derivace elementárních funkcí. Vypočtěte derivace následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

d) $f(x) = \sin \sin \sin x$

e) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$

f) $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

g) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

h) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

i) $f(x) = x \operatorname{arcsin}^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x - 2x$

j) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$.

Výsledky: **(a)** $2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, **(b)** $f(x)^{-\frac{2}{3}} \frac{2x^2}{(x^3-1)^2}$, **(c)** $(\sin 2x - 2x \cot x^2 \sin^2 x)/\sin x^2$, **(d)** $\cos \sin \sin x . \cos \sin x . \cos x$, **(e)** $-2^{\operatorname{tg}(1/x)} \frac{\ln 2}{x^2 \cos^2(1/x)}$, **(f)** $x^{a^a-1} a^a + a^{x^a+1} x^{a-1} \ln a + a^{a^x+x} \ln^2 a$, **(g)** $\sin x^{\cos x}(\cos x \cot x - \sin x \ln \sin x) + \cos x^{\sin x}(\cos x \ln \cos x - \sin x \tan x)$, **(h)** $\frac{1}{1+x^2}$, **(i)** $\arcsin^2 x$, **(j)** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Derivace vyšších řádů. Parciální derivace.

(1) Ověřte, že funkce

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

(2) Ověřte, že funkce

$$v(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4t}}$$

splňuje v $(0, \infty) \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v,$$

kde Δ je jako v předchozím příkladě.

(3) Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.

(4) Spočtěte $f^{(50)}(x)$ je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$.

Výsledky: **(3)** $-2^{-10} x^{-\frac{19}{2}} 17!!$, **(4)** $2^{49} \sin 2x(\binom{50}{2} - 2x^2) + 2^{51} 5^2 x \cos 2x$.