

Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2019/20, MFF UK
 Sada příkladů 3

Limity funkcí I.

(1) Dokažte z definice, že

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

(2) Spočítejte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{x}{x^2 - 4}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx) - 1}{x}, n \in \mathbb{N}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, m, n \in \mathbb{N}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, n \in \mathbb{N}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right), m, n \in \mathbb{N}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^2} + 1}{\sqrt{\frac{3}{x^4} - \frac{6}{x^2} + 5}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1})}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

l) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1-x)}{x^2}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - \sqrt[n]{1-x}}{x}, m, n \in \mathbb{N}$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}$

r) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a > 0$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}, m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$

Výsledky: 2. a) 1, b) $\frac{2}{3}$, c) $-\frac{3}{8}$, d) $\binom{n+1}{2}$, e) $\frac{49}{24}$, f) $\frac{mn(n-m)}{2}$, g) $\binom{n+1}{2}$, h) $\frac{m-n}{2}$, i) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, j) 1, k) 1, l) $\frac{1}{4}$, m) $\frac{1}{2}$, n) -1, o) $\frac{2}{27}$, p) $\frac{n-m}{nm}$, q) 1, r) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, s) $\frac{an+bm}{mn}$.