Matematická analýza pro fyziky I
ZS 2021/22, MFF UK
Sada příkladů 1

Úpravy výrazů a komplexní čísla.

(1) Najděte všechna reálná x splňující:

a) $x^2 > 4x - 5$ b) $|x+1| - |x-1| = 1$ c) $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} < \frac{1}{x^2-1}$

d) $\big||x-1| - 5\big| < 1$ e) $\frac{x}{|x+3|} < \frac{1}{x-1}$ f) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} \le 1$

g) $\sqrt{(3x-7)(x-1)} \le 2(x-2)$ h) $\cos(x) \le \sin(x)$ i) $\cos^2(x) \ge \sin^2(x)$

j) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \ge 0$

(2) Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnosti:

a) $|x^2 - 4x + 3| \le |x^2 - 4|$ b) $|x+1| - |x| + |x-1| < 2$ c) $|x^2 + x - 2| < x$

d) $\frac{x+1}{x} \le |x|$ e) $\frac{1}{x+2} \le \frac{1}{2x-2}$ f) $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$

g) $\sqrt{x - 12} < x$

(3) Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

a) $|x+y| \le |x| + |y|$ b) $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|$

(4) Načrtněte podmnožiny roviny určené následujícími předpisy:

a) $x^2 - 2|y| > 1$ b) $|x| \le 5$ a $|y| \le 5$ c) $|x| \ge 5$ nebo $|y| \ge 5$

d) $x^2 + y^2 - 2(x-y) \le 2$ e) $|x| + |y| = 2$ f) $(x-1)^2 + (y+2)^2 \le 4$

g) $|x-y|^2 - |x+y|^2 \le 4$ h) $x^2+y^2 \le 4$ a $(x-1)^2+y^2 \ge 1$

(5) Nalezněte reálnou a imaginární část komplexních čísel

a) $\frac{2}{1-3\mathrm{i}}$ b) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3$

(6) Nalezněte velikosti a argumenty komplexních čísel

a) $-2 - 2\mathrm{i}$ b) $1 + \mathrm{i}^{123}$

(7) Dokažte, že pro libovolná $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

a) $z + \overline{z} = 2\Re z$ b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\Im z$

c) $\overline{(\overline{z})} = z$ d) $|\overline{z}| = |z|$

e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ f) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$

g) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$
V f) a g) předpokládáme $z_1, z_2 \neq 0$.

(8) Řešte v $\mathbb{C}$:

a) $x^6 + 1 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$

(9) Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $|x+1| + |x-1| \ge 2$ b) $|x-3| + |x-2| \le 0$

Zde $\Re z$, resp. $\Im z$, resp. $\arg z$ značí reálnou, resp. imaginární část, resp. argument komplexního čísla z.

Řešení: 1. **a**) $x \in \mathbb{R}$, **b**) $x = \frac{1}{2}$, **c**) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, **d**) $x \in (-5, -3) \cup (5, 7)$, **e**) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (1, 3)$, **f**) $x \in \langle 2, 10 \rangle$, **g**) $x \in \langle \frac{7}{3}, +\infty)$, **h**) $x \in \langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$, **i**) $x \in \langle -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$, **j**) $x \in \langle 1, 2 \rangle$

2. **a**) $x \in \langle 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{7}{4} \rangle \cup \langle 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$, **b**) $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$, **c**) $x \in (-1 + \sqrt{3}, \sqrt{2})$, **d**) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle (1 + \sqrt{5})/2, +\infty)$, **e**) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 4\rangle$, **f**) $x \in (-1, 3)$, **g**) $x \geq 12$

5. **a**) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$, **b**) $-8, 0$

6. **a**) $2\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi$, **b**) $\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi$

8. **a**) $\{\exp(\frac{(\pi+2\pi k)i}{6}) :\ k = 0, 1, \cdots, 5\}$, **b**) $\{\exp(\frac{2\pi i}{3}),\ \exp(\frac{4\pi i}{3})\}$, $\exp(ix) := \cos x + i \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$

9. **a**) $\mathbb{R}$, **b**) $\emptyset$

Výroky, množiny a zobrazení.

(1) Dokažte, že platí

a) $A \Rightarrow A$

b) $(A \Rightarrow B \bigwedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

c) $A \Leftrightarrow A$

d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$

e) $\big((A \vee B) \bigwedge C\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge C) \bigvee (B \wedge C)\big)$

f) $\big((A \wedge B) \bigvee C\big) \Leftrightarrow \big((A \vee C) \bigwedge (B \vee C)\big)$

g) $\operatorname{non}(\operatorname{non} A) \Leftrightarrow A$

h) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Rightarrow \operatorname{non} A)$

i) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\operatorname{non} B \Leftrightarrow \operatorname{non} A)$

j) $(\operatorname{non}(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \wedge (\operatorname{non} B))$

k) $(\operatorname{non}(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\operatorname{non} A) \vee (\operatorname{non} B))$

l) $(\operatorname{non}(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\operatorname{non} B))$

m) $(\operatorname{non}(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\operatorname{non} B)) \bigvee (B \bigwedge (\operatorname{non} A))$

(2) Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

(3) Rozhodněte, zda platí následující výroky a zapište jejich negaci.

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ y > x$
(b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x > y$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x > y$
(d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R} :\ |a - b + c| \geq |a| - |b| - |c|$
(e) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N} :\ z > x \Rightarrow y < z$
(f) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
(g) $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

(4) Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte:

a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

c) $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$

d) $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$

e) Nechť $A_i,\ i = 1, 2, \dots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.
Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

(5) Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení a $A, B \subset X,\ C, D \subset Y$. Rozhodněte, zda platí

a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

b) $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$

c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

e) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$

(6) Dokažte, že následující množiny jsou spočetné:

a) množina celých čísel $\mathbb{Z}$

b) množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$

c) množina všech konečných posloupností přirozených čísel

(7) Nechť $\varphi : \langle 0, \infty) \to \langle 1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.

(8) * Ukažte, že funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ není polynomiální.

(9) * (Parametrizace části Descartova listu) Nechť

$$M = \{(x, y) : \ x^3 + y^3 - 2xy = 0, \ x < 0, \ y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

a nechť $g : M \to \mathbb{R}, \ g(x, y) = y/x$. Ukažte, že $g : M \to \mathbb{R}$ je prostá, najděte její obor hodnot R_g a inverzní funkci g^{-1}.

Řešení: 2. **a**) Ano, **b**) Ne, **c**) Ano, **d**) Ano, **e**) Ano, **f**) Ano, **g**) Ano
4. **a**) Ano, **b**) Ne, **c**) Ano, **d**) Ne, **e**) Ano

$*$ značí těžší příklady pro zájemce.