PŘEDNÁŠKA 9
Semimodulární svazy a dimenze

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Definujeme semimodulární a duálně semimodulární svazy a ukážeme, že obě vlastnosti jsou důsledkem modularity. Zformulujeme a ukážeme Jordanovu-Holderovu-Oreho větu o délkách maximálních řetězců v semimodulárních svazech. Definujeme dimenzi prvků svazů lokálně konečné délky. Ukážeme, že semimodularitu, duální semimodularitu a modularitu lokálně konečných svazů lze charakterizovat pomocí dimenzní funkce, konkrétně pomocí analogie věty o dimenzi průniku a spojení známé z lineární algebry.

V uspořádané množině $(P, \leq)$ značíme $a \preceq b$ pokud $a \prec b$ nebo $a = b$, tj., pokud $b/a = \{a, b\}$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *semimodulární* pokud

$$a \prec b \implies a \vee c \preceq b \vee c,$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *duálně semimodulární* pokud

$$a \prec b \implies a \wedge c \preceq b \wedge c,$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Lemma 9.1. *Každý modulární svaz je semimodulární.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz a nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \prec b$. Je-li $b \leq a \vee c$ je $a \vee c = b \vee c$. V opačném případě dostaneme z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

$$a \leq (a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b) \leq b. \tag{9.1}$$

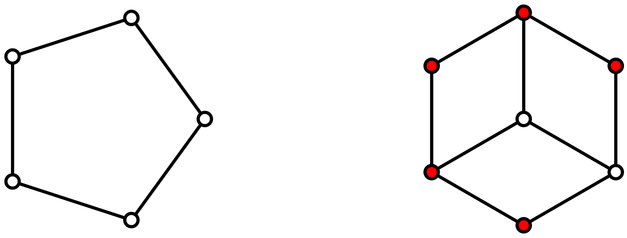
Protože platí, že $a \prec b$ a $b \nleq a \vee c$, dostaneme z (9.1) rovnost $a = (a \vee c) \wedge b$. Vzhledem k Lemmatu 6.1 jsou intervaly $b/a = b \wedge ((a \vee c) \wedge b)$ a $(b \vee c)/(a \vee c) = (b \vee (a \vee c))/(a \vee c)$ izomorfní. Odtud plyne, že $a \vee c \prec b \vee c$. $\square$

Z Lemmatu 9.1 je ihned vidět, že

Důsledek 9.2. *Každý modulární svaz je duálně semimodulární.*

Na Obrázku 1 jsou znázorněny svazy $\boldsymbol{N_5}$ a $\boldsymbol{E}$. Svaz $\boldsymbol{N_5}$ není modulární, semimodulární ani duálně semimodulární. Svaz $\boldsymbol{E}$ je semimodulární, ale není

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 10. prosince 2018.



$\boldsymbol{N_5}$ $\boldsymbol{E}$

OBRÁZEK 1. (Ne)semimodulární svazy

duálně semimodulární a tedy ani modulární. Červeně jsou znázorněny vrcholy tvořící podsvaz svazu $\boldsymbol{E}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.

Svaz $\boldsymbol{A}$ je *konečné délky* pokud existuje přirozené číslo n tak, že každý řetězec ve svazu $\boldsymbol{A}$ je délky nejvýše n. Nejmenší takové n nazveme *délkou* svazu $\boldsymbol{A}$ a označíme $\ell(\boldsymbol{A})$ (viz. Přednáška 5). Všimněme si, že svaz konečné délky je nutně omezený, tj., že má nejmenší a největší prvek.

Pro řetězce $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ a $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_m$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ píšeme

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \circeq \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle$$

pokud $n = m$ a existuje permutace π množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že

$$a_j/a_{j-1} \approx b_{\pi(j)}/b_{\pi(j)-1},$$

pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$[1]. Snadno nahlédneme, že relace $\circeq$ je ekvivalencí na množině všech řetězců ve svazu $\boldsymbol{A}$.

Věta 9.3 (Jordanova-Hölderova-Oreova věta)**.** *Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz konečné délky. Jsou-li $0 = a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_n = 1$ a $0 = b_0 \prec b_1 \prec \cdots \prec b_m = 1$ maximální řetězce ve svazu $\boldsymbol{A}$, potom*

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \circeq \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

Důkaz. Větu ukážeme indukcí podle délky $\ell(\boldsymbol{A})$ svazu $\boldsymbol{A}$. Je-li $\ell(\boldsymbol{A}) = 0$ je svaz $\boldsymbol{A}$ triviální, je-li $\ell(\boldsymbol{A}) = 1$ je $\boldsymbol{A}$ dvouprvkový svaz. V obou těchto případech věta zřejmě platí.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m \leq n$, a že $\ell(\boldsymbol{A}) = n$. Navíc předpokládejme, že věta platí ve všech svazech délky nejvýše $n-1$. Všimněme si, že $\ell(1/a_1) = n - 1$. V opačném případě by totiž svaz $\boldsymbol{A}$ obsahoval řetězec délky větší než $n = \ell(\boldsymbol{A})$.

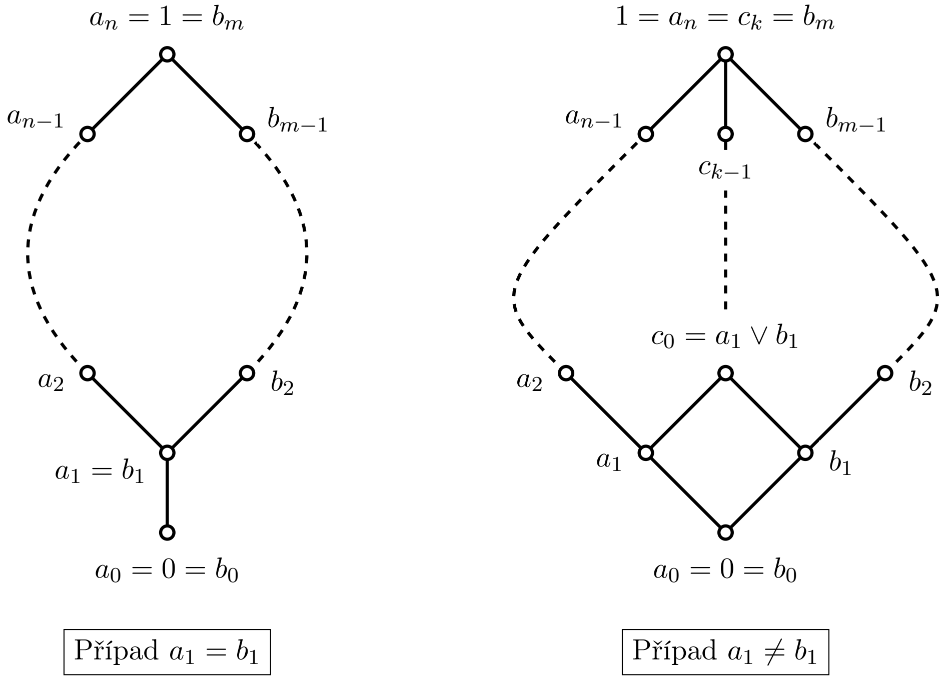
Jsou-li prvky a_1 a b_1 porovnatelné, plyne z $0 = a_0 \prec a_1$ a $0 = b_0 \prec b_1$, že $a_1 = b_1$. Podle indukčního předpokladu platí relace

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \circeq \langle b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

Odtud ihned plyne, že také

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \circeq \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

[1]Intervaly a_j/a_{j-1} a $b_{\pi(j)}/b_{\pi(j)-1}$ jsou projektivní (cf. Přednáška 8).



Obrázek 2. Jordanova-Hölderova-Oreho věta

Předpokládajme nyní, že jsou prvky a_1 a b_1 neporovnatelné. V tomto případě je $a_1 < a_1 \vee b_1$, a protože je svaz $\boldsymbol{A}$ semimodulární, plyne z $0 \prec b_1$, že $a_1 \prec a_1 \vee b_1$. Podobně ukážeme, že $b_1 \prec a_1 \vee b_2$. Navíc z $0 \prec a_1 \nleq b_1$ plyne, že $0 = a_1 \wedge b_1$. Odtud je vidět, že $a_1/a_0 \sim (a_1 \vee b_1)/b_1$ a také, že $b_1/b_0 \sim (a_1 \vee b_1)/a_1$. Proto platí, že

$$\langle a_0, a_1, a_1 \vee b_1 \rangle \doteq \langle b_0, b_1, a_1 \vee b_1 \rangle. \tag{9.2}$$

Buď $a_1 \vee b_1 = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k = 1$ maximální řetězec v intervalu $1/(a_1 \vee b_1)$. Protože $\ell(1/a_1) \leq n-1$, platí podle indukčního předpokladu, že

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \doteq \langle a_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle. \tag{9.3}$$

Odtud plyne, že $k = n - 2$. Vidíme, že $0 = a_0 \prec b_1 \prec c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_k$ je řetězec ve svazu $\boldsymbol{A}$ maximální možné délky n. Odtud nahlédneme, že $\ell(1/b_1) = n - 1$. Podle indukčního předpokladu je

$$\langle b_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle \doteq \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle. \tag{9.4}$$

Protože $a_0 = 0 = b_0$ a $c_0 = a_1 \vee b_1$ dostaneme z (9.2), že

$$\langle a_0, a_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle \doteq \langle b_0, b_1, c_0, c_1, \ldots, c_k \rangle.$$

Odtud, z (9.3), (9.4) a z tranzitivity relace $\doteq$ dostaneme, že

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle \doteq \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle.$$

□

Okamžitým důsledkem Věty 9.3 je, že

Důsledek 9.4. *V semimodulárním svazu konečné délky mají všechny maximální řetězce stejnou délku.*

Řeknem, že svaz $\boldsymbol{A}$ je *lokálně konečné délky*, je-li b/a konečné délky pro všechna $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s nejmenším prvkem. Pro každé $a \in \boldsymbol{A}$ položme $\dim a = \ell(a/0)$. Z definic ihned plyne, že je-li $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s nejmenším prvkem, potom

$$\dim a + \ell(b/a) \leq \dim b, \tag{9.5}$$

pro všechny uspořádané dvojice $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$. Je-li svaz $\boldsymbol{A}$ navíc semimodulární, plyne z Věty 9.3, že

$$\dim a + \ell(b/a) = \dim b, \tag{9.6}$$

pro všechny uspořádané dvojice $a \leq b$ v $\boldsymbol{A}$.

Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární lokálně konečné délky a $a, b \in \boldsymbol{A}$. Indukcí podle $n := \ell(b/a \wedge b)$ dostaneme nerovnost

$$\ell(a \vee b/a) \leq \ell(b/a \wedge b). \tag{9.7}$$

Věta 9.5. *Svaz $\boldsymbol{A}$ lokálně konečné délky s nejmenším prvkem je semimodulární právě když*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) \leq \dim a + \dim b, \tag{9.8}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Buď $\boldsymbol{A}$ semimodulární svaz konečné délky s nejmenším prvkem a nechť $a, b \in \boldsymbol{A}$. Dvojí aplikací (9.6) dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} \dim(a \vee b) &= \dim a + \ell(a \vee b/a), \\ \dim(a \wedge b) &= \dim b - \ell(b/a \wedge b), \end{aligned} \tag{9.9}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$. Z (9.9) a nerovnosti (9.7) odvodíme (9.8). ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ je svaz lokálně konečné délky splňující (9.8). Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \prec b$. Pokud platí $b \leq a \vee c$, je nutně $a \vee c = b \vee c$. V případě, že $b \nleq a \vee c$, plyne z $a \prec b$ rovnost $a = b \wedge (a \vee c)$. Z nerovnosti (9.8) dostaneme, že

$$\dim a + \dim(b \vee c) \leq \dim b + \dim(a \vee c). \tag{9.10}$$

Z nerovností (9.5) a (9.10) odvodíme, že

$$\ell(b \vee c/a \vee c) \leq \dim(b \vee c) - \dim(a \vee c) \leq \dim b - \dim a \leq 1.$$

□

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz lokálně konečné délky s největším prvkem. Pro $a \in \boldsymbol{A}$ položme

$$\operatorname{codim} a = \ell(1/a).$$

Duální formou Věty 9.5 je

Důsledek 9.6. *Svaz* $\boldsymbol{A}$ *lokálně konečné délky s největším prvkem je duálně semimodulární právě když*

$$\operatorname{codim}(a \wedge b) + \operatorname{codim}(a \vee b) \leq \operatorname{codim} a + \operatorname{codim} b,$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Věta 9.7. *Svaz* $\boldsymbol{A}$ *lokálně konečné délky s nejmenším prvkem je modulární právě když*

$$\dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) = \dim a + \dim b, \tag{9.11}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Postačí ověřit, že dokazovaná ekvivalence platí pro každý interval $c/0$, $c \in \boldsymbol{A}$. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že svaz $\boldsymbol{A}$ je konečné délky.

($\Rightarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. Vzhledem k Lemmatu 9.1 a Důsledku 9.2 je $\boldsymbol{A}$ semimodulární a současně duálně semimodulární. Aplikací rovnosti (9.6) dostaneme, že

$$\operatorname{codim} a = \ell(1/a) = \dim 1 - \dim a,$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{A}$. Odtud a z Důsledku 9.6 dostaneme, že

$$\dim a + \dim b \leq \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b)$$

platí pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$. Odtud a z (9.8) plyne (9.11). ($\Leftarrow$) Předpokládejme pro spor, že svaz $\boldsymbol{A}$ není modulární. Potom $\boldsymbol{A}$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ a tedy prvky $a < c$ a b takové, že platí rovnosti

$$a \vee b = b \vee c \quad \text{a} \quad a \wedge b = b \wedge c. \tag{9.12}$$

Protože $a < c$, je podle definice $\dim a = \ell(a/0) < \ell(c/0) = \dim c$. Z rovností (9.12) a z předpokladu (9.11) ale plyne, že

$$\begin{aligned} \dim a &= \dim(a \wedge b) + \dim(a \vee b) - \dim b \\ &= \dim(b \wedge c) + \dim(b \vee c) - \dim b = \dim c. \end{aligned}$$

To je spor. □

Důsledek 9.8. *Svaz lokálně konečné délky je modulární právě když je současně semimodulární a duálně semimodulární.*