PŘEDNÁŠKA 8
Hlavní kongruence a (slabá) projektivita

PAVEL RŮŽIČKA

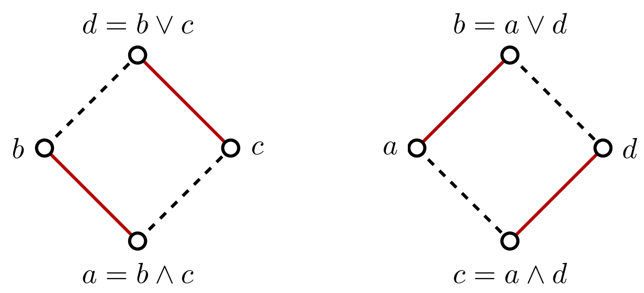
Abstrakt. Definujeme perspektivitu a slabou perspektivitu intervalů svazu. Tranzitivní obaly těchto relací nazveme projektivitou a slabou projektivitou. Pomocí slabé projektivity popíšeme vztahy mezi hlavními kongruencemi svazu.

Pro každou dvojici a, b prvků svazu $\boldsymbol{A}$ označme symbolem $\Theta(a, b)$ nejmenší kongruenci svazu $\boldsymbol{A}$ obsahující dvojici $\langle a, b\rangle$. Budeme zkoumat, kdy pro danou čtveřici prvků $a, b, c, d \in \boldsymbol{A}$ platí, že $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(c, d)$. Protože $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$, můžeme se omezit na uspořádané dvojice $a \leq b$ z $\boldsymbol{A}$.

Nechť $a \leq b$ a $c \leq d$ jsou dvojice uspořádaných prvků svazu $\boldsymbol{A}$. Řekneme, že interval d/c je *perspektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \sim b/a$), jestliže nastane jeden z těchto dvou případů:

$$\begin{cases} b = a \vee d \text{ a zároveň } c = a \wedge d, \\ a = b \wedge c \text{ a zároveň } d = b \vee c. \end{cases}$$

Oba případy, definující perspektivitu intervalů jsou znázorněny na Obrázku 1:



$\boxed{b/a \sim d/c}$

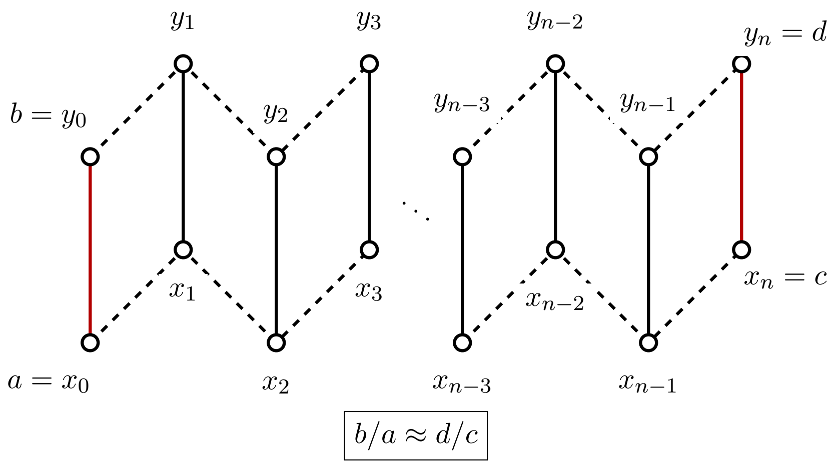
Obrázek 1. Perspektivita intervalů

Přednášky se konaly v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 3. a 10. prosince 2018.

Řekneme, že interval d/c je *projektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \approx b/a$), jestliže existuje konečná posloupnost

$$d/c = y_0/x_0 \sim y_1/x_1 \sim \cdots \sim y_n/x_n = b/a.$$

Projektivita intervalů je znázorněna na Obrázku 2.



Obrázek 2. Projektivita intervalů

Je zřejmé, že $d/c \approx b/a \implies \Theta(a, b) = \Theta(c, d)$. Obrácená implikace obecně neplatí. Ve svazu $\boldsymbol{M_3}$ je $a/0 \not\approx 1/0$ a zároveň je svaz $\boldsymbol{M_3}$ jednoduchý a tedy platí rovnost $\Theta(0, 1) = \Theta(0, a)$.

Zkoumejme, kdy $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(c, d)$. K tomu definujme slabší relace (než perspektivita a projektivita) na množině intervalů. Buď b/a, d/c dvojice jeho intervalů svazu $\boldsymbol{A}$. Budeme psát

$$d/c \searrow b/a, \quad \text{jestliže} \quad a \le b \wedge c \quad \text{a zároveň} \quad d \le b \vee c,$$
$$d/c \nearrow b/a, \quad \text{jestliže} \quad b \ge a \vee d \quad \text{a zároveň} \quad c \ge a \wedge d.$$

Řekneme, že interval d/c je *slabě perspektivní* intervalu b/a jestliže platí $d/c \searrow b/a$ nebo $d/c \nearrow b/a$. Situaci, kdy je d/c je slabě perspektivní b/a zachycuje Obrázek 3.

Řekneme, že d/c je *slabě projektivní* b/a (což značíme $d/c \rightrightarrows b/a$), jestliže existuje posloupnost intervalů

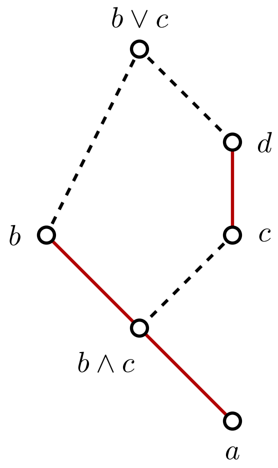
$$d/c = y_0/x_0 \searrow y_1/x_1 \nearrow y_2/x_2 \searrow \ldots \nearrow y_n/x_n = b/a.$$

Všimněme si, že na rozdíl od projektivity není relace slabé projektivity symetrická, je pouze reflexivní a tranzitivní[1].

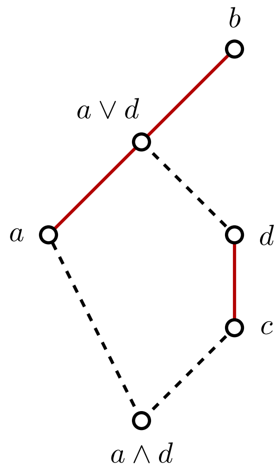
Lemma 8.1. *Pro intervaly b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $d/c \rightrightarrows b/a$ právě když existuje posloupnost intervalů*

$$d/c = y_0/x_0 \sim v_1/u_1 \subseteq y_1/x_1 \sim \cdots \sim v_n/u_n \subseteq y_n/x_n = b/a.$$

[1] Všimněme si, že (slabá) projektivita je právě tranzitivním obalem (slabé) perspektivity



$\boxed{d/c \searrow b/a}$



$\boxed{d/c \nearrow b/a}$

Obrázek 3. Slabá perspektivita

Důkaz. ($\Leftarrow$) Z definic ihned nahlédneme, že z $y/x \sim v/u$ vyplývá buďto $y/x \searrow v/u$ nebo $y/x \nearrow v/u$. Inkluze $v/u \subseteq y/x$ implikuje, že platí současně $v/u \searrow y/x$ a $v/u \nearrow y/x$. ($\Rightarrow$) Jestliže $d/c \searrow b/a$, pak podle definice platí, že

$$d/c \subseteq (b \vee c)/c \sim b/(b \wedge c) \subseteq b/a.$$

Podobně z $d/c \nearrow b/a$ plyne, že

$$d/c \subseteq d/(a \wedge d) \sim (a \vee d)/a \subseteq b/a.$$

$\square$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme indukcí svazový term $p_n(x, y_1, \dots, y_n)$ takto:

$$p_1(x, y_1) := x \wedge y_1,$$

$$p_{n+1}(x, y_1, \dots, y_{n+1}) := \begin{cases} p_n(x, y_1, \dots, y_n) \vee y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ p_n(x, y_1, \dots, y_n) \wedge y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Neformálně je tedy

$$p_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \dots \vee y_n), & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \dots \wedge y_n), & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Snadno nahlédneme, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$p_n(p_m(x, y_1, \dots, y_m), y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) =$$
$$\begin{cases} p_{m+n}(x, y_1, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ sudé,} \\ p_{m+n-1}(x, \dots, y_m \wedge y_{m+1}, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ liché.} \end{cases}$$

Lemma 8.2. *Pro dvojici intervalů b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $d/c \rightrightarrows b/a$ právě když existuje posloupnost $t_1, \dots, t_n$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ taková, že $p_n(a, t_1, \dots, t_n) = c$ a $p_n(b, t_1, \dots, t_n) = d$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Je-li $d/c \searrow b/a$, potom $p_3(a, b, c, d) = c$ a $p_3(b, b, c, d) = d$. Pokud $d/c \nearrow b/a$, tak $p_2(a, d, c) = c$ a $p_2(b, d, c) = d$. Využijeme-li předchozího pozorování, sestrojíme odtud požadovanou posloupnost $t_1, \dots, t_n$. ($\Leftarrow$) Všimněme si, že pro každý interval y/x svazu $\boldsymbol{A}$ a každé $t \in \boldsymbol{A}$ platí, že

$$(y \vee t)/(x \vee t) \searrow y/x \quad \text{a} \quad (y \wedge t)/(x \wedge t) \nearrow y/x.$$

Odtud indukcí odvodíme, že pro každé přirozené číslo n a každou n-tici prvků $t_1, \dots, t_n$ platí, že

$$p_n(b, t_1, \dots, t_n)/p_n(a, t_1, \dots, t_n) \rightrightarrows b/a.$$

□

Protože p_n jsou svazové termy, platí pro každou posloupnost $t_1, \dots, t_n$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ a každé $a, b \in \boldsymbol{A}$, že

$$p_n(a, t_1, \dots, t_n) \equiv_{\Theta(a,b)} p_n(b, t_1, \dots, t_n).$$

Proto z Lemmatu 8.2 plyne, že

Důsledek 8.3. *Pro každou dvojici intervalů b/a a d/c svazu $\boldsymbol{A}$ plyne z $d/c \rightrightarrows b/a$, že $c \equiv_{\Theta(a,b)} d$.*

Lemma 8.4. *Buď b/a interval svazu $\boldsymbol{A}$. Na svazu $\boldsymbol{A}$ definujme relaci Φ takto: $x \equiv_\Phi y$ právě když existuje konečná posloupnost*

$$x \wedge y = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = x \vee y$$

v $\boldsymbol{A}$ taková, že $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ a platí rovnost $\Phi = \Theta(a, b)$.

Důkaz. Nejprve ukažme, že je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. K tomu stačí ověřit, že relace Φ splňuje podmínky Lemmatu 6.4. Protože pro každé $t \in \boldsymbol{A}$ platí, že $t/t \nearrow (b \vee t)/(a \vee t) \searrow b/a$, je tato relace reflexivní. Podmínky (1) a (2) Lemmatu 6.4 jsou zřejmě splněny. Předpokládejme, že pro nějakou dvojici $c \leq d$ prvků svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že $c \equiv_\Phi d$ a nechť $s \in \boldsymbol{A}$. Podle definice existuje konečná posloupnost $c = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = d$ taková, že $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odtud dostaneme že, $c \vee s = t_0 \vee s \leq t_1 \vee s \leq \cdots \leq t_n \vee s = d \vee s$. Ze vztahů $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \searrow t_{i=1}/t_i \rightrightarrows b/a$, dostanem, že $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \rightrightarrows b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podle definice relace Φ je pak $c \vee s \equiv_\Phi d \vee s$. Podobně bychom ukázali, že $c \wedge s \equiv_\Phi d \wedge s$. Podle Lemmatu 6.4 je relace Φ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$.

Z definice Φ je vidět, že $a \equiv_\Phi b$ a tedy $\Theta(a, b) \subseteq \Phi$. Podle Důsledku 8.3 je naopak $\Phi \subseteq \Theta(a, b)$. Proto se obě kongruence rovnají. □

Jemným přeformulováním Lemmatu 8.4 dostaneme následující větu.

Věta 8.5 (Dilworth 1950)**.** *Buď* b/a *a* d/c *dvojice intervalů svazu* $\boldsymbol{A}$. *Potom platí, že* $\Theta(c, d) \subseteq \Theta(a, b)$ *právě když existuje konečná posloupnost* $c = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = d$ *ve svazu* $\boldsymbol{A}$ *taková, že* $t_j/t_{j-1} \rightrightarrows b/a$ *pro všechna* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.