PŘEDNÁŠKA 7
Kongruence svazů

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Definujeme svazové kongruence a ukážeme jak pro vhodné binární relace svazu ověřit, že se jedná o svazové kongruence. Popíšeme svaz $\mathrm{Con}(\boldsymbol{A})$ kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. Nakonec ukážeme, že svaz kongruencí libovolného svazu je distributivní.

7.1. **Vlastnosti svazových kongruencí.** Nechť Θ je binární relace na množině A. Budeme psát $a \equiv_\Theta b$ (nebo také $a \equiv b\ (\Theta)$) pokud je dvojice $\langle a, b\rangle$ v relaci Θ. Předpokládejme, že je relace Θ ekvivalencí. Symbolem

$$[\,a\,]_\Theta := \{b \in A \mid a \equiv_\Theta b\}.$$

označíme třídou této ekvivalence obsahující prvek a.

Kongruence svazu $\boldsymbol{A}$ je ekvivalence Θ na $\boldsymbol{A}$ taková, že

$$a_1 \equiv_\Theta b_1 \text{ a } a_2 \equiv_\Theta b_2 \implies \begin{cases} a_1 \vee b_1 \equiv_\Theta a_2 \vee b_2, \\ a_1 \wedge b_1 \equiv_\Theta a_2 \wedge b_2, \end{cases} \tag{7.1}$$

pro všechna $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{A}$. Připomeňme že, kongruence svazů jsou právě jádra svazových homomorfismů. Symbolem $\boldsymbol{A}/\Theta$ budeme značit *faktorový svaz* svazu $\boldsymbol{A}$ podle kongruence Θ (prvky svazu $\boldsymbol{A}/\Theta$ jsou rozkladové třídy $[\,a\,]_\Theta$, $a \in \boldsymbol{A}$, kongruence Θ. Symbolem $\pi_{\boldsymbol{A}/\theta}$ budeme značit *kanonickou projekci* $\pi_{\boldsymbol{A}/\theta} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}/\Theta$ určenou předpisem $a \mapsto [\,a\,]_\Theta$.

Podmnožina C uspořádané množiny $(P, \leq)$ je *konvexní* (v P) pokud

$$a \leq b \leq c \text{ a } a, c \in C \implies b \in C,$$

pro všechna $a, b, c \in P$.

Je vidět ihned z definice, že průnik konvexních množin je opět konvexní množina. Celá množina P je jistě konvexní v P. Proto pro libovolnou $X \subseteq P$ existuje nejmenší konvexní podmnožina P, která X obsahuje. Označíme ji $\updownarrow X$.

Lemma 7.1. *Pro každou $X \subseteq P$ platí, že*

$$\updownarrow X = \uparrow X \cap \downarrow X = \{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\}.$$

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 26. listopadu 2018.

Důkaz. Každá horní a každá dolní podmnožina uspořádané množiny P je konvexní. Odtud plyne, že

$$\updownarrow X \subseteq \uparrow X \cap \downarrow X.$$

Je-li $p \in \uparrow X \cap \downarrow X$, existují $a, b \in X$ tak, že $a \leq p \leq b$. Proto platí, že

$$\uparrow X \cap \downarrow X \subseteq \{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\}.$$

Nakonec existují-li $a, b \in X$ tak, že $a \leq p \leq b$, leží p v každé konvexní podmnožině P, která obsahuje množinu X. Odtud dostáváme, že

$$\{p \in P \mid \exists a, b \in X \colon a \leq p \leq b\} \subseteq \updownarrow X.$$

□

Tvrzení 7.2. *Nechť Θ je kongruence svazu $\boldsymbol{A}$. Potom je $[\,a\,]_\Theta$ konvexním podsvazem svazu $\boldsymbol{A}$, pro každé $a \in \boldsymbol{A}$. Tj., bloky kongruence svazu jsou jeho konvexními podsvazy.*

Důkaz. Buď a prvek svazu $\boldsymbol{A}$. Protože jsou obě svazové operace idempotentní, je $[\,a\,]_\Theta$ podsvazem svazu $\boldsymbol{A}$.[1] Zbývá ukázat, že $[\,a\,]_\Theta$ je konvexní podmnožinou svazu $\boldsymbol{A}$. Nechť $b \leq c \leq d$, pro nějaké $b, d \in [\,a\,]_\Theta$ a $c \in \boldsymbol{A}$. Potom platí, že $a \equiv_\Theta b \equiv_\Theta d$, odkud dostaneme, že $a \equiv_\Theta b = b \wedge c \equiv_\Theta d \wedge c = c$. Proto platí také, že $c \in [\,a\,]_\Theta$. □

Podmínku (8.1) v definici kongruence svazu můžeme mírně oslabit.

Lemma 7.3. *Ekvivalence Θ definovaná na svazu $\boldsymbol{A}$ je kongruencí tohoto svazu právě když*

$$a \equiv_\Theta b \implies \begin{cases} a \vee t \equiv_\Theta b \vee t, \\ a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t, \end{cases} \tag{7.2}$$

pro všechna $a, b, t \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Je-li Θ kongruence svazu $\boldsymbol{A}$, pak zřejmě splňuje podmínku (8.2). Předpokládejme naopak, že ekvivalence Θ splňuje podmínku (8.2). Předpokládejme, že $a_i \equiv_\Theta b_i$, $i = 1, 2$, pro nějaké $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Potom z (8.2) a komutativity svazových operací odvodíme, že

$$a_1 \vee a_2 \equiv_\Theta b_1 \vee a_2 \equiv_\Theta b_1 \vee b_2,$$
$$a_1 \wedge a_2 \equiv_\Theta b_1 \wedge a_2 \equiv_\Theta b_1 \wedge b_2.$$

Proto platí (8.1). □

Následující lemma je zvláště užitečné při ověřování toho, že nějaká binární relace na svazu $\boldsymbol{A}$ je jeho kongruencí.

Lemma 7.4 (Grätzer)**.** *Buď Θ reflexivní relace na svazu $\boldsymbol{A}$. Jsou-li splněny následující tři podmínky*

(1) *$a \equiv_\Theta b$ právě když $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$, pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$,*

[1] Pro každé $b, c \in [\,a\,]_\Theta$, je $b \vee c \equiv_\Theta a \vee a = a$ a proto $b \vee c \in [\,a\,]_\Theta$. Podobně pro průsek.

(2) *je-li* $a \equiv_\Theta b$ *a zároveň* $b \equiv_\Theta c$*, potom* $a \equiv_\Theta c$*, pro všechna* $a \le b \le c$ *v* $\boldsymbol{A}$*,*

(3) *je-li* $a \equiv_\Theta b$*, potom* $a \vee t \equiv_\Theta b \vee t$ *a zároveň* $a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t$*, pro všechna* $a \le b$ *v* $\boldsymbol{A}$ *a libovolné* $t \in \boldsymbol{A}$*,*

potom je Θ *kongruencí svazu* $\boldsymbol{A}$*.*

Důkaz. Z podmínky (1) je okamžitě vidět, že relace Θ je symetrická. Abychom ukázali, že je relace Θ ekvivalencí na $\boldsymbol{A}$, zbývá ověřit, že je tato relace tranzitivní. Nejprve ověříme, že

$$a \equiv_\Theta c \implies a \equiv_\Theta b \text{ a } b \equiv_\Theta c, \tag{7.3}$$

pro všechna $a \le b \le c$ v $\boldsymbol{A}$. To plyne ihned z (3), neboť z $a \le c$ dostaneme rovnosti $a = a \wedge b \equiv_\Theta c \wedge b = b$ a podobně $b = a \vee b \equiv_\Theta c \vee b = c$.

Pro $a \le b$ v $\boldsymbol{A}$ označme symbolem b/a interval ohraničený prvky a, b, tj.,

$$b/a := \{t \in \boldsymbol{A} \mid a \le t \le b\}.$$

Pomocné tvrzení 1. Nechť $a \le d$ v $\boldsymbol{A}$ a platí, že $a \equiv_\Theta d$. Potom $b \equiv_\Theta c$ pro každé $b, c \in d/a$.

Důkaz. Vzhledem k (1) stačí ukázat, že $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$. Protože $a \le b \wedge c \le d$ a $a \equiv_\Theta d$, platí vzhledem k (8.3), že $b \wedge c \equiv_\Theta d$. Podobně máme $b \wedge c \le b \vee c \le d$. Vzhledem k (8.3) dostaneme, že $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$. Podle (1) je pak $b \equiv_\Theta c$. $\perp$

Nyní jsme připraveni dokončit důkaz tranzitivity relace Θ. Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \equiv_\Theta b$ and $b \equiv_\Theta c$. Vzhledem k (1) platí, že $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$, odkud vzhledem k Pomocnému tvrzení 1 plyne, že $a \wedge b \equiv_\Theta b \equiv_\Theta a \vee b$. Podobně z $b \wedge c \equiv_\Theta b \vee c$ odvodíme, že platí $b \wedge c \equiv_\Theta b \equiv_\Theta b \vee c$. Protože $b \wedge c \le b \le b \vee c$, plyne z podmínky (3), že $a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \wedge b$ a současně $a \vee b \equiv_\Theta a \vee b \vee c$. Celkem tak máme

$$a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \wedge b \equiv_\Theta b \equiv_\Theta a \vee b \equiv_\Theta a \vee b \vee c.$$

Protože tyto prvky tvoří rostoucí posloupnost, dostaneme z (2), že $a \wedge b \wedge c \equiv_\Theta a \vee b \vee c$. Protože $a, c \in (a \vee b \vee c)/(a \wedge b \wedge c)$, dostaneme z Pomocného tvrzení (1), že $a \equiv_\Theta c$. Ukázali jsme, že je relace Θ tranzitivní a tedy je to ekvivalence.

Zbývá ukázat, že ekvivalence Θ splňuje implikaci (8.2). Nechť $a, b, t \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \equiv_\Theta b$. Vzhledem k (1) je pak $a \wedge b \equiv_\Theta a \vee b$. Z podmínky (3) dostaneme, že $a \wedge b \wedge t \equiv_\Theta (a \vee b) \wedge t$. Protože $a \wedge t, b \wedge t \in ((a \vee b) \wedge t)/(a \wedge b \wedge t)$, plyne z Pomocného tvrzení 1, že $a \wedge t \equiv_\Theta b \wedge t$. Podobně bychom ukázali, že $a \vee t \equiv_\Theta b \vee t$. Z Lemmatu 8.3 nyní plyne, že Θ je kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. $\square$

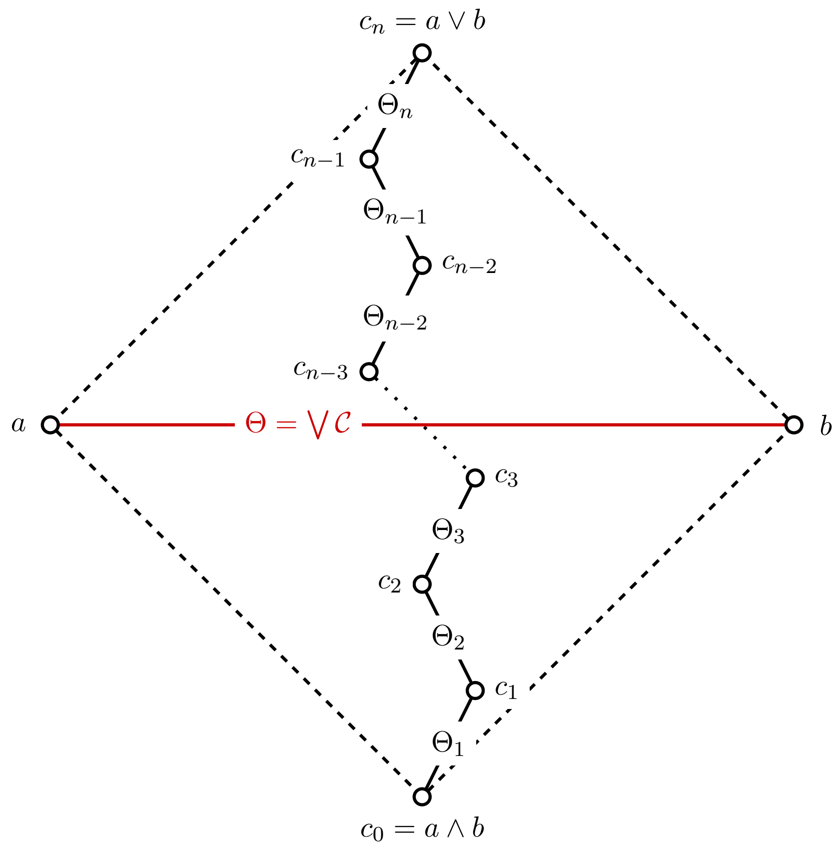
Připomeňme, že svaz $\boldsymbol{A}$ nezveme *úplným*, má-li každá jeho podmnožina infimum a supremum, vzhledem k uspořádání indukovanému svazovými operacemi. Infimum (resp. supremum) podmnožiny M svazu $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\bigwedge M$ a $\bigvee M$.

Všimněme si, že úplný svaz má nejmenší a největší prvek. Tyto prvky odpovídají po řadě spojení a průseku $\bigvee \emptyset$ a $\bigwedge \emptyset$. Z definice svazových operací je také vidět, že $\bigwedge\{a,b\} = a \wedge b$ a $\bigvee\{a,b\} = a \vee b$, pro každou dvojici prvků a, b svazu.

Každý systém $\boldsymbol{U}$ podmnožin množiny A uzavřený na libovolné průniky tvoří úplný svaz. Přitom platí, že pro každou $M \subseteq \boldsymbol{U}$ je

$$\bigwedge M = \bigcap M \quad \text{a} \quad \bigvee M = \bigcap\{N \in \boldsymbol{U} \mid \bigcup M \subseteq N\}.$$

Průnik libovolné množiny kongruencí svazu je opět kongruence svazu. Proto tvoří všechny kongruence svazu $\boldsymbol{A}$ úplný svaz. Svaz všech kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\operatorname{Con} \boldsymbol{A}$.



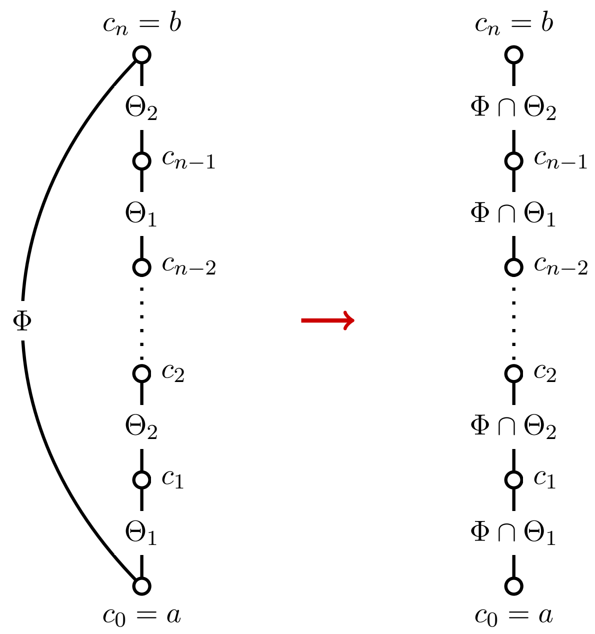
Obrázek 1. Spojení kongruencí

Lemma 7.5. *Buď $\mathcal{C}$ množina kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$. Na svazu $\boldsymbol{A}$ definujme relaci Θ takto: Nechť $a, b \in \boldsymbol{A}$. Potom $a \equiv_\Theta b$ právě když existuje konečná rostoucí posloupnost $a \wedge b = c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_{n-1} \leq c_n = a \vee b$ v $\boldsymbol{A}$ taková, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existuje kongruence $\Theta_j \in \mathcal{C}$ taková, že $c_{j-1} \equiv_{\Theta_j} c_j$.*

Relace Θ je kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$ a platí, že $\Theta = \bigvee \mathcal{C}$.

Důkaz. K důkazu první části lemmatu stačí ověřit, že relace Θ splňuje podmínky (1-3) z předpokladů Lemmatu 8.4. Všechny tyto podmínky však nahlédneme okamžitě z vlastností kongruencí a z popisu relace Θ. Z definice je ihned vidět, že $\bigcup \mathcal{C} \subseteq \Theta$. Naopak je zřejmé, že každá kongruence svazu $\boldsymbol{A}$, která obsahuje $\bigcup \mathcal{C}$ obsahuje také relaci Θ. Proto platí, že $\Theta = \bigvee \mathcal{C}$. □

Věta 7.6 (Fynayama a Nakayama (1942))**.** *Svaz* Con $\boldsymbol{A}$ *kongruencí svazu* $\boldsymbol{A}$ *je distributivní.*



Obrázek 2. Svaz Con $\boldsymbol{A}$ je distributivní

Důkaz. Stačí ověřit, že pro libovolné kongruence Φ, Θ_1, a Θ_2 svazu $\boldsymbol{A}$ platí inkluze

$$\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2) \subseteq (\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2),$$

tedy, že pro libovolné $a, b \in \boldsymbol{A}$ platí, že

$$a \equiv b \quad (\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2)) \implies a \equiv b \quad ((\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2)).$$

Dvojici a, b můžeme nahradit uspořádanou dvojicí $a \wedge b, a \vee b$. Proto lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \leq b$. Předpokládejme, že $a \equiv b$ $(\Phi \cap (\Theta_1 \vee \Theta_2))$. To znamená, že $a \equiv_\Phi b$ a zároveň $a \equiv_{\Theta_1 \vee \Theta_2} b$. Z Lemmatu 8.5 a z druhé z uvedených relací plyne, že existuje rostoucí posloupnost $a = c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n = b$ taková, že $c_{i-1} \equiv_{\Theta_1} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liché a $c_{i-1} \equiv_{\Theta_2} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sudé. Můžeme totiž předpokládat, že kongruence Θ_1 a Θ_2 se v rostocím řetízku intervalů (c_{i-1}, c_i) střídají. Situace je znázorněna na Obrázku 2. Protože $a \equiv_\Phi b$ a $a = c_0 \leq c_1, \ldots, c_{n-1} \leq$

$c_n = b$, platí, že $c_{i-1} \equiv_\Phi c_i$, pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud plyne, že $c_{i-1} \equiv_{\Phi\cap\Theta_1} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liché a $c_{i-1} \equiv_{\Phi\cap\Theta_2} c_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sudé. Odtud nakonec dostáváme, že $a \equiv b \ ((\Phi \cap \Theta_1) \vee (\Phi \cap \Theta_2))$, což bylo dokázat. $\square$