PŘEDNÁŠKA 6
Vlastnosti modulárních svazů

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Nejprve ukážeme větu o izomorfismu intervalů v modulárních svazech. Odtud odvodíme Oreovu-Kurošovu větu. Dále ukážeme, že redukované rozklady prvků modulárního svazu mají všechny stejnou velikost. Nakonec charakterizujeme nezávislé množiny v modulárních svazech.

Buď $(P, \leq)$ uspořádaná množina a $p \leq q$ uspořádaná dvojice jejích prvků. Symbolem q/p označíme interval ohraničený těmito prvky, tj.,

$$q/p := \{x \in P \mid p \leq x \leq q\}.$$

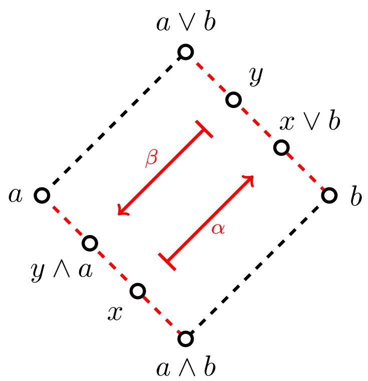
Lemma 6.1 (Věta o isomorfismu intervalů)**.** *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz a $a, b \in \boldsymbol{A}$. Potom jsou zobrazení*

$$\begin{aligned} \alpha\colon a/(a \wedge b) &\to (a \vee b)/b \\ x &\mapsto x \vee b \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \beta\colon (a \vee b)/b &\to a/(a \wedge b) \\ y &\mapsto y \wedge a \end{aligned}$$

vzájemně inverzními izomorfismy intervalů $a/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$.



Obrázek 1. Izomorfismy intervalů v modulárních svazech

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 12. listopadu 2018.

Důkaz. Zobrazení α a β jsou obě monotónní. Stačí tedy ukázat, že jsou vzájemně inverzní. Z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ odvodíme pro každé $x \in \boldsymbol{A}$ splňující $a \wedge b \leq x \leq a$, že

$$\beta\alpha(x) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x.$$

Podobně pro každé $y \in \boldsymbol{A}$ takové, že $b \leq x \leq a \vee b$, dostaneme rovnosti

$$\alpha\beta(y) = (y \wedge a) \wedge b = y \wedge (a \wedge b) = y.$$

□

Lemma 6.2 (Kuroš, Ore 1935)**.** *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz, $a \in \boldsymbol{A}$ a $X, Y \subseteq J(\boldsymbol{A})$ konečné podmnožiny takové, že $a = \bigvee X = \bigvee Y$. Potom pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ takové, že $a = y \vee \bigvee(X \setminus \{x\})$.*

Důkaz. Buď $x \in X$ a položme $x' := \bigvee(X \setminus \{x\})$. Potom

$$a = x' \vee \bigvee Y = \bigvee_{y \in Y} (x' \vee y).$$

Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ modulární, existuje podle Lemmatu 6.1 izomorfismus $\beta\colon a/x' \to x/(x \wedge x')$ daný předpisem $t \mapsto t \wedge x$. Odtud dostaneme, že

$$x = x \wedge \bigvee_{y \in Y} (x' \vee y) = \bigvee_{y \in Y} (x \wedge (x' \vee y)).$$

Protože je prvek x spojově nerozložitelný, existuje $y \in Y$ takové, že $x = x \wedge (x' \vee y)$ a tedy $x \leq x' \vee y$. Odtud plyne, že

$$a = x' \vee y = y \vee \bigvee(X \setminus \{x\}).$$

□

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Řekneme, že konečná $X \subseteq J(\boldsymbol{A})$ je *redukovaným rozkladem* prvku $a \in \boldsymbol{A}$ pokud $a = \bigvee X$, ale $a > \bigvee Y$ pro každou $Y \subsetneq X$. Je zřejmé, že každá $Y \subseteq J(\boldsymbol{A})$ taková, že platí $a = \bigvee Y$, obsahuje nějaký redukovaný rozklad prvku a.

Lemma 6.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Nechť konečné $X, Y \subseteq J(\boldsymbol{A})$ splňují $a = \bigvee X = \bigvee Y$. Je-li Y redukovaný rozklad prvku a, platí nerovnost $|Y| \leq |X|$.*

Důkaz. Nechť X a Y jsou dva konečné rozklady prvku a. Předpokládejme, že Y je redukovaný rozklad a že X je nejmenší rozklad a. Buď $X' \subseteq X$ největší taková, že existuje $Y' \subseteq Y$ splňující $|Y'| \leq |X'|$ a zároveň

$$a = \bigvee(X \setminus X') \vee \bigvee Y'.$$

Předpokládejme, že $X' \subsetneq X$ a zvolme $x \in X \setminus X'$. Podle Lemmatu 6.2 existuje $y \in Y$ tak, že

$$a = \bigvee(X \setminus (X' \cup \{x\})) \vee \bigvee(Y' \cup \{y\}).$$

Z toho, že $|Y'| \leq |X'|$ a $x \notin X'$ plyne nerovnost $|Y' \cup \{y\}| \leq |X' \cup \{x\}| = |X'| + 1$. To je ve sporu s volbou množiny X'.

Proto $X = X'$ a tedy $a = \bigvee Y'$. Protože je Y redukovaný rozklad prvku a, dostáváme odtud, že $Y = Y'$. Z nerovnosti $|Y'| \leq |X'|$ tak máme okamžitě $|Y| \leq |X|$. $\square$

Důsledek 6.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Každé dva redukované rozklady prvku $a \in \boldsymbol{A}$ mají stejný počet prvků.*

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A} \setminus \{0\}$ se nazveme *nezávislou* pokud pro každé konečné $U, V \subseteq I$ platí, že

$$\bigvee U \wedge \bigvee V = \bigvee (U \cap V).$$

Lemma 6.5. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz. Podmnožina $I \subseteq \boldsymbol{A} \setminus \{0\}$ je nezávislá právě když*

$$\bigvee U \wedge \bigvee W = 0$$

pro každou dvojici konečných disjunktních $U, W \subseteq I$.

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je zřejmá z definice. Ukážeme ($\Leftarrow$). Nechť U a V jsou konečné podmnožny I. Protože $U \cap V \subseteq U$, plyne z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

$$\begin{aligned} \bigvee U \wedge \bigvee V &= \bigvee U \wedge \Big(\bigvee (V \setminus U) \vee \bigvee (U \cap V) \Big) \\ &= \Big(\bigvee U \wedge \bigvee (V \setminus U) \Big) \vee \bigvee (U \cap V) = \bigvee (U \cap V), \end{aligned}$$

neboť množiny U a $V \setminus U$ jsou disjunktní. $\square$

Lemma 6.6. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární. Množina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jeho nenulových prvků je nezávislá právě když*

$$a_k \wedge \bigvee_{i=1}^{k-1} a_i = 0,$$

pro všechna $k = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je zřejmá. Implikaci ($\Leftarrow$) ukážeme indukcí podle n. Jednoprvková množina $\{a_1\}$ je jistě nezávislá. Nechť X, Y jsou disjunktní podmnožiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pokud $X \cup Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, plyne rovnost $\bigvee X \cap \bigvee Y = 0$ z indukčního předpokladu. Nechť $a_n \in X \cup Y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_n \in X$. Potom $Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ a z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} \bigvee X \wedge \bigvee Y &\leq \Big(\bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee a_n \Big) \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \\ &= \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee \left(a_n \wedge \bigvee_{i=1}^{n-1} a_i \right) \\ &= \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \vee 0 = \bigvee (X \setminus \{a_n\}). \end{aligned}$$

Proto

$$\bigvee X \wedge \bigvee Y = \bigvee (X \setminus \{a_n\}) \wedge \bigvee Y = 0,$$

opět podle indukčního předpokladu, neboť platí, že

$$(X \setminus \{a_n\}) \cup \bigvee Y \subseteq \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}.$$

$\square$