PŘEDNÁŠKA 5
Konjuktivně disjunktivní termy, konečné distributivní svazy

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Ukážeme, že každý prvek distributivního svazu odpovídá termu v konjuktivně-disjunktivním (resp. disjunktivně-konjunktivním) tvaru. Odtud odvodíme, že varieta distributivních svazů je lokálně konečná. Dále ukážeme, že konečný distributivní svaz je izomorfní svazu dolních podmnožin uspořádané nožiny jeho spojově nerozložitelnéch prvků. Odtud odvodíme, že konečný svaz je distributivní právě když je každý jeho spojově nerozložitelný prvek spojový prvočinitel. Nakonec ukážeme, že délka konečného distributivního svazu odpovídá velikosti množiny spojově nerozložitelnéch prvků tohoto svazu.

5.1. **Svazové termy.** Buď $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ (spočetná) množina proměnných. *Svazový term* definujeme induktivně takto:

(1) Každá z proměnných $x_1, x_2, \dots$ je svazovým termem.
(2) Jsou-li p a q svazové termy, potom jsou také $(p \vee q)$ a $(p \wedge q)$ svazové termy.

V zápisu svazových termu budeme vynechávat závorky tam, kde nám to asociativita svazových operací dovolí. Například tedy budeme místo $((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$ psát jen $p_1 \vee p_2 \vee p_3$.

Symbolem $T[X]$ označíme množinu všech svazových termů s proměnnými z množiny X. *Složitost termu* je hodnota zobrazení $\rho\colon T[X] \to \mathbb{N}$ definovaná induktivně takto:

(1) $\rho(x) = 1$ pro všechna $x \in X$,
(2) $\rho(p \vee q) = \rho(p \wedge q) = \rho(p) + \rho(q) + 1$, pro všechna $p, q \in T[X]$.

Jsou-li všechny proměnné vyskytující se ve svazovém termu p prvky množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, řekneme, že p je *n-ární svazový term*, což zapíšeme, podobně jako v případě číselných polynomů, symbolem $p(x_1, \dots, x_n)$. Množinu všech n-árních svazových termů označíme $T[x_1, \dots, x_n]$.

Interpretací (řádu n) termu $p \in T[x_1, \dots, x_n]$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme n-ární operaci $p_{\boldsymbol{A}}\colon A^n \to A$ na množině A určenou předpisem

$$\langle a_1, \dots, a_n\rangle \mapsto p(a_1, \dots, a_n).$$

Svazovou (n-ární) *identitou* rozumíme výraz $p \approx q$, kde p, q jsou n-ární svazové termy. Řekneme, že třída svazů $\mathcal{U}$ splňuje svazovou identitu $p \approx q$ (což

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 5. listopadu 2018.

zapisujeme $p \approx_{\mathcal{U}} q$) jsou-li interpretace termů p, q ve svazu $\boldsymbol{A}$ shodné pro všechna $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$. Symbolem $p \lesssim q$ (a podobně $p \lesssim_{\mathcal{U}} q$) značíme, že $q \approx p \vee q$ (a podobně $q \approx_{\mathcal{U}} p \vee q$).

Tvrzení 5.1. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a $p \in T[x_1, \dots, x_n]$. Interpretace $p_{\boldsymbol{A}}$ termu p ve svazu $\boldsymbol{A}$ je monotóní a idempotentní operace. Dále platí, že*

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \lesssim p(x_1, \dots, x_n) \lesssim x_1 \vee \dots \vee x_n,$$

pro všechna $p \in T[x_1, \dots, x_n]$.

Důkaz. V obou případech indukcí podle složitosti termu. □

5.2. **Disjunktivně-konjunktivní tvar termů.** Řekneme, že svazový term p je v *disjunctivně-konjunktivním* (resp. *konjunktivně-disjunktivním*) tvaru, existuje-li přirozené číslo n a konečné podmnožiny $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ takové, že

$$p = \bigvee_{i=1}^{n} \Big(\bigwedge Y_i\Big) \text{ (resp. } p = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigvee Y_i\Big) \text{).}$$

Připomeňme, že symbolem $\mathcal{D}$ značíme varietu všech distributivních svazů.

Věta 5.2. *Pro každý svazový term p existují svazové termy s (resp. t) v disjunktivně-konjunktivním (resp. konjunktivně-disjunktivním) tvaru takový, že*

$$p \approx_{\mathcal{D}} s \approx_{\mathcal{D}} t.$$

Důkaz. Buď p n-ární svazový term. Ukážeme, že existuje n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p \approx_{\mathcal{D}} s$. Existenci n-árního svazovho termu t v konjunktivně-disjunktivním tvaru takového, že $p \approx_{\mathcal{D}} t$ bychom ukázali obdobně.

Podle Věty 4.3 lze každý distributivní svaz vnořit do kartézské mocniny dvouprvkového svazu $\boldsymbol{C_2}$. To znamená, že varieta distributivních svazů je svazem $\boldsymbol{C_2}$ generovaná a tedy stačí sestrojit n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p_{\boldsymbol{C_2}} = s_{\boldsymbol{C_2}}$. Pro každou n-tici $\boldsymbol{a} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \boldsymbol{C_2}^n$ položme

$$S(p) := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1\},$$
$$\chi_{\boldsymbol{a}} := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_i = 1\},$$

a definujme

$$s(x_1, \dots, x_n) := \bigvee_{\boldsymbol{a} \in S(p)} \left(\bigwedge_{i \in \chi_{\boldsymbol{a}}} x_i \right). \tag{5.1}$$

Z definice (5.1) je ihned vidět, že

$$p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1 \implies \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in S(p) \implies s_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1,$$

a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}} \leq s_{\boldsymbol{C_2}}$.

Nechť naopak pro nějaké $\boldsymbol{b} := \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in C_2^n$ platí, že $s_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Z definice (5.1) je potom vidět, že existuje $\boldsymbol{a} \in S(p)$ takové, že $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$. Podle

Tvrzení 5.1 indukují svazové termy monotónní operace a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Dostáváme tak i opačnou nerovnost $s_{\boldsymbol{C_2}} \leq p_{\boldsymbol{C_2}}$. □

Důsledek 5.3. *Konečně generovaný distributivní svaz je konečný.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{D}$ distributivní svaz, který je generován konečnou množinou $\{d_1, \dots, d_n\}$. Vzhledem k Větě 5.2 existuje pro každé $c \in \boldsymbol{D}$ n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $c = s(d_1, \cdots, d_n)$. Z definice (5.1) je vidět, že existuje nejvýše 2^{2^n} takových termů. Svaz $\boldsymbol{D}$ má tedy nejvýše 2^{2^n} prvků. □

5.3. **Struktura konečných distributivních svazů.** Nenulový prvek s svazu $\boldsymbol{A}$ je *spojově nerozložitelný* pokud z rovnosti $s = a \vee b$ plyne, že $s \in \{a, b\}$. Symbolem $J(\boldsymbol{A})$ označíme množinu všech spojově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$. Množina $J(\boldsymbol{A})$ je přirozeně uspořádaná restrikcí uspořádání svazu $\boldsymbol{A}$.

Lemma 5.4. *Každý nenulový prvek konečného svazu je spojením spojově nerozložitelných prvků.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Označme N množinu těch nenulových prvků svazu $\boldsymbol{A}$, které nejsou spojením spojově nerozložitelných prvků. Pro spor předpokládejme, že je množina N neprázdná. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, má množina N minimální prvek, označme jej c. Prvek c je nenulový a jistě není spojově nerozložitelný. Proto ve svazu $\boldsymbol{A}$ existují prvky $a, b < c$ takové, že $c = a \vee b$. Z minimality prvku c v množině N plyne, že $a = s_1 \vee \cdots \vee s_k$ a $b = t_1 \vee \cdots \vee t_l$ pro nějaké spojově nerozložitelné $s_1, \dots, s_k$ a $t_1, \dots, t_l$ (všimněme si, že prvky a, b jsou nutně nenulové). Potom ale

$$c = a \vee b = s_1 \vee \cdots \vee s_k \vee t_1 \vee \cdots \vee t_l,$$

a tedy c je spojením spojově nerozložitelných prvků. To je ve sporu s předpokladem, že $c \in N$. □

Poznámka. *Řeknem, že uspořádaná množina P splňuje podmínku konečnosti klesajícíh řetězců, je-li každý ostře klesající řetězec v P konečný. Snadno nahlédneme, že uspořádaná množina P splňuje podmínku konečnosti klesajících řetězců právě když má každá její neprázdná podmnožina minimální prvek. Pro svazy splňující podmínku konečnosti klesajících řetězců můžeme argumentovat stejně jako v důkazu Věty 5.4. Proto je každý nenulový prvek takového svazu spojením spojově nerozložitelných prvků.*

Příklad 5.1. *Buď X nekonečná množina. Položme*

$$A := \{Y \subseteq X \mid \textit{Rozdíl } X \setminus Y \textit{ je konečný}\}.$$

Snadno nahlédneme, že je množina A uzavřena na konečná sjednocení a konečné průniky a tedy spolu s těmito operacemi tvoří svaz, označme jej $\boldsymbol{A}$. Žádný prvek svazu $\boldsymbol{A}$ není spojově nerozložitelný.

Nenulový prvek p svazu $\boldsymbol{A}$ je *spojový prvočinitel* pokud z nerovnosti $p \leq a \vee b$ plyne, že $p \leq a$ nebo $p \leq b$.

Z definic je vidět, že každý spojový prvočinitel je spojově nerozložitelný. Naopak snadno nahlédneme, že prvky $a, b, c \in \boldsymbol{M_3}$ jsou spojově nerozložitelné, ale žádný z nich není spojový prvočinitel.

Lemma 5.5. *Každý spojově nerozložitelný prvek distributivního svazu je spojovým prvočinitelem.*

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{A}$ je distributivní svaz $s \in J(\boldsymbol{A})$. Předpokládejme, že $s \leq a \vee b$ pro nějaké $a, b \in \boldsymbol{A}$. Z distributivity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že $s = s \wedge (a \vee b) = (s \wedge a) \vee (s \wedge b)$. Protože prvek s je spojově nerozložitelný, buďto $s = s \wedge a$ (a tedy $s \leq a$) nebo $s = s \wedge b$ (a tedy $s \leq b$). Proto je s spojovým prvočinitelem. □

Připomeňme, že *dolní* (resp. *horní*) podmnožina uspořádané množiny P je $D \subseteq P$ taková, že $p \leq d \implies p \in D$ (resp. $H \subseteq P$ taková, že $d \leq p \implies p \in H$), pro všechna $p \in P$, $d \in D$ (resp. $d \in H$). Pro libovolnou podmnožinu X uspořádané množiny P položíme

$$\downarrow X := \{p \in P \mid \exists x \in X : p \leq x\},$$
$$\uparrow X := \{p \in P \mid \exists x \in X : x \leq p\}.$$

Pro jednoprvkovou množinu $X = \{x\}$ bude značit $\downarrow x$ (resp. $\uparrow x$) místo $\downarrow \{x\}$ (resp. $\uparrow \{x\}$). Symbolem $D(P)$ (resp. $H(P)$) označíme množinu všech dolních (resp. horních) podmnožin uspořádané množiny P. Tyto množiny tvoří poduniverza svazu všech podmnožin P s operacemi průniku a sjednocení.

Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Definujme zobrazení α a β takto:

$$\begin{aligned} &\alpha\colon \boldsymbol{A} \to D(J(\boldsymbol{A})) && \beta\colon D(J(\boldsymbol{A})) \to \boldsymbol{A} \\ &a \mapsto \{s \in J(\boldsymbol{A}) \mid s \leq a\} && D \mapsto \bigvee D \end{aligned} \tag{5.2}$$

Symbolem $1_{\boldsymbol{A}}$ budeme značit identické zobrazení $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$.

Pozorování 5.6. *Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ svazy a $\alpha\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ bijekce taková, že $a \leq b$ právě když $\alpha(a) \leq \alpha(b)$, pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$, je α izomorfismus těchto svazů. To plyne ihned z toho, že svazové operace jsou definovány jako infimum a suprémum. Odtud plyne, že jsou-li $\alpha\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ a $\beta\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ vzájemně inverzní bijekce zachovávající uspořádání, jsou obě tato zobrazení izomorfismy svazů $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.*

Věta 5.7. *Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz.*

(1) *Zobrazení α (resp. β) definované předpisem* (5.2) *zachovává průseky (resp. spojení) a $\beta\alpha = 1_{\boldsymbol{A}}$. Speciálně, zobrazení α je prosté a zobrazení β je na.*

(2) *Je-li svaz $\boldsymbol{A}$ distributivní, jsou α a β vzájemně inverzní svazové izomorfismy.*

Důkaz. (1) Z defininice infima plyne, že $s \leq a \wedge b$ právě když $s \leq a$ a zároveň $s \leq b$ pro všechna $a, b, s \in \boldsymbol{A}$. Odtud je vidět, že zobrazení α zachovává průseky. Naopak z Lemmatu 1.1. plyne, že $\bigvee(G \cup H) = (\bigvee G) \vee (\bigvee H)$, pro všechna $G, H \subseteq \boldsymbol{A}$. Proto zobrazení β zachovává spojení. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, je podle Lemmatu 5.4 každý jeho prvek spojením spojově nerozložitelných prvků tohoto svazu. Odtud plyne, že

$$\beta\alpha(a) = \bigvee\{s \in J(\boldsymbol{A}) \mid s \leq a\} = a,$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{A}$. (2) Předpokládejme, že konečný svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Buď D dolní podmnožina uspořádané množiny $J(\boldsymbol{A})$ a $s \in J(\boldsymbol{A})$. Vzhledem k Lemmatu 5.5 a distributivitě svazu $\boldsymbol{A}$ je s spojovým prvočinitelem. Proto z $s \leq \bigvee D$ plyne, že $s \leq d$ pro nějaké $d \in D$ a tedy $s \in D$. Proto platí

$$\alpha\beta(D) = \{s \in J(\boldsymbol{A}) \mid s \leq \bigvee D\} = D.$$

Proto jsou α a β vzájemně inverzní bijekce. Protože zobrazní α zachovává průseky a β zachovává spojení, zachovávají obě tato zobrazení uspořádání. Vzhledem k Pozorování 5.6 jsou zobrazení α, β svazovými izomorfismy. $\square$

Důsledek 5.8. *Konečný distributivní svaz je izomorfní svazu všech dolních podmnožin uspořádané množiny jeho spojově nerozložitelných prvků.*

Všiměme si, že v důkazu části (2) Věty 5.7 jsme využili jen toho, že každý spojově nerozložitelný prvek svazu $\boldsymbol{A}$ je v tomto svazu spojovým prvočinitelem. Protože svaz všech dolních podmnožin uspořádané množiny je distributivní (je to podsvaz svazu všech podmnožin této množiny), dostáváme, že

Důsledek 5.9. *Konečný svaz je distributivní právě když je každý jeho spojově nerozložitelný prvek spojovým prvočinitelem.*

Připomeňme, že řetězcem míníme lineárně uspořádaný svaz. Délku konečného řetězce $\boldsymbol{C}$ pak definujeme jako $|\boldsymbol{C}| - 1$. *Délkou* $d(\boldsymbol{A})$ konečného svazu $\boldsymbol{A}$ pak rozumíme největší délku řetězce v $\boldsymbol{A}$.

Tvrzení 5.10. *Pro konečný svaz $\boldsymbol{A}$ platí, že $d(\boldsymbol{A}) \leq |J(\boldsymbol{A})|$. Je-li $\boldsymbol{A}$ distributivní, platí rovnost $d(\boldsymbol{A}) = |J(\boldsymbol{A})|$.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz a $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ řetězec v $\boldsymbol{A}$. Podle Lemmatu 5.4 je každý prvek svazu $\boldsymbol{A}$ spojením spojově nerozložitelných prvků. Proto platí rovnost $a_i = \bigvee(\downarrow a_i \cap J(\boldsymbol{A}))$ pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ a tedy

$$\downarrow a_0 \cap J(\boldsymbol{A}) \subsetneq \downarrow a_1 \cap J(\boldsymbol{A}) \subsetneq \cdots \subsetneq \downarrow a_n \cap J(\boldsymbol{A}).$$

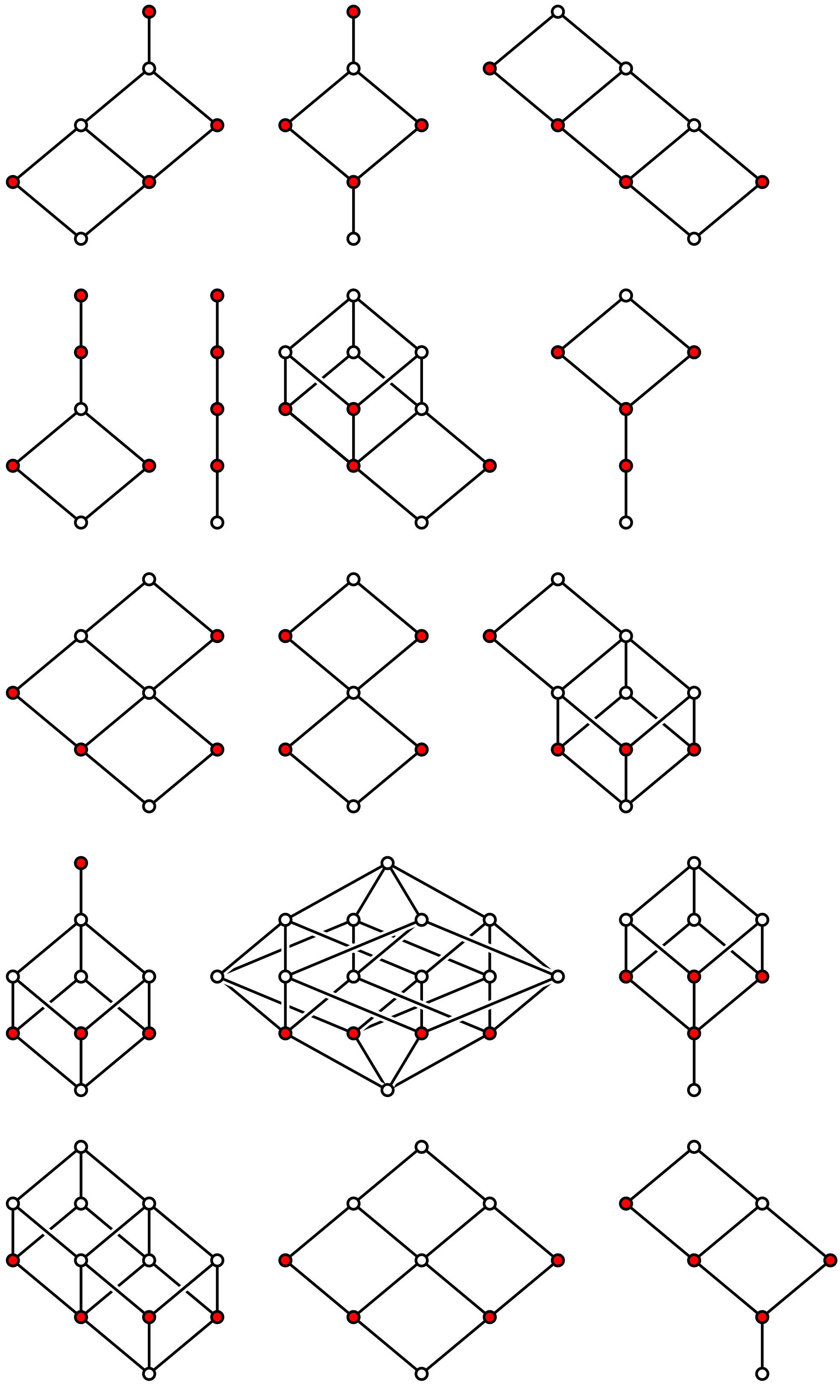
Odtud je vidět, že $n \leq |J(\boldsymbol{A})|$.

Předpokládejme nyní, že svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Položme $n := |J(\boldsymbol{A})|$ a uspořádejme prvky množiny $J(\boldsymbol{A})$ do posloupnosti $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n\rangle$ tak, že d_i je minimální prvek množiny $J(\boldsymbol{A}) \setminus \{d_1, \ldots, d_{i-1}\}$, pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z konstrukce této posloupnosti je vidět, že $D_i = \{d_1, \ldots, d_i\}$ jsou dolní podmnožiny uspořádané množiny $J(\boldsymbol{A})$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Z Věty 5.7 plyne, že

$$\beta(D_0) < \beta(D_1) < \cdots < \beta(D_n)$$

je řetěz délky n ve svazu $\boldsymbol{A}$. □

Z Tvrzení 5.10 vidíme, že distributivní svazy délky n odpovídají vzájemně jednoznačně n-prvkovým uspořádaným množinám. Na Obrázku 1 jsou znázorněny všechny distributivní svazy délky 4. Červeně jsou vyznačeny jejich spojově nerozložitelné prvky.



Obrázek 1. Distributivní svazy délky 4