PŘEDNÁŠKA 4
Varieta distributivních svazů

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Ukážeme, že každé dva prvky distributivního svazu lze oddělit prvoideálem. Odtud odvodíme, že každý distributivní svaz je možné vnořit do kartézské mocniny dvouprvkového svazu. Odtud plyne, že varieta distributivních svazů je generovaná dvouprvkovým svazem a tedy je nejmenší netriviální svazovou varietou.

4.1. **Varieta distributivních svazů.** Podmnožinu D částečně uspořádané množiny $(P, \leq)$ nazveme *dolní* pokud

$$p \leq q \text{ a } q \in D \implies p \in D$$

pro všechna $p, q \in P$. Duálně nazveme podmnožinu H částečně uspořádané množiny $(P, \leq)$ *horní*, jestliže

$$p \leq q \text{ a } p \in H \implies q \in H$$

pro všechna $p, q \in P$. Všimněme si, že D je dolní podmnožina, právě když je $P \setminus D$ horní podmnožina uspořádané podmnožiny P.

Definice. *Ideálem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \vee b \in I \text{ právě když } a, b \in I.$$

Duálně *filtrem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $F \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \wedge b \in F \text{ právě když } a, b \in F.$$

Ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je *prvoideál*, pokud je $\boldsymbol{A} \setminus I$ filtr. Duálně, filtr F svazu $\boldsymbol{A}$ je *ultrafiltr*, pokud tvoří množina $\boldsymbol{A} \setminus F$ ideál (a tedy nutně prvoideál).

Z definice je vidět, že ideály jsou právě neprázdné dolní podmnožiny svazu uzavřené na konečná spojení a filtry jsou právě neprázdné horní podmnožiny svazu uzavřené na konečné průseky. Všimněme si také, že ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je prvoideál právě když je jeho doplněk $\boldsymbol{A} \setminus I$ neprázdný a uzavřený na průseky.

Lemma 4.1. *Pro každou dvojici různých prvků distributivního svazu existuje prvoideál obsahující právě jeden z nich.*

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 29. října 2018.

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ distributivní svaz a $a \neq b$ dvojice jeho prvků. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \nleq b$. Uvažme možinu

$$\mathcal{B} := \{I \mid I \text{ je ideál, } a \notin I \text{ a } b \in I\}.$$

Snadno nahládneme, že $\{x \in \boldsymbol{A} \mid x \leq b\} \in \mathcal{B}$ a množina $\mathcal{B}$ je tedy neprázdná. Možina $\mathcal{B}$ je zřejmě uzavřená na sjednocení řetězců a podle Zornova lemmatu má tedy maximální prvek. Označme jej $P_{\langle a,b\rangle}$.

Protože $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$, je $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Ukážeme, že $P_{\langle a,b\rangle}$ je prvoideál. Pro spor předpokládejme, že existují $c, d \notin P_{\langle a,b\rangle}$ takové, že $c \wedge d \in P_{\langle a,b\rangle}$. Množina

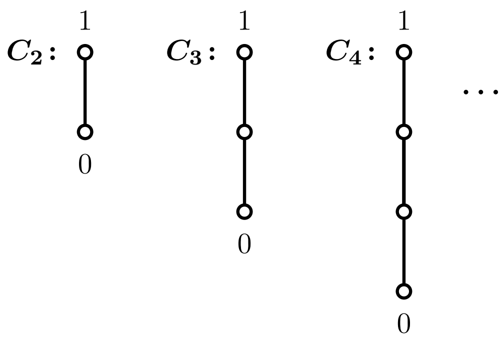
$$I_c := \{x \in \boldsymbol{A} \mid \exists y \in P_{\langle a,b\rangle} \colon x \leq c \vee y\}$$

tvoří ideál ostře obsahující $P_{\langle a,b\rangle}$ (neboť $c \notin P_{\langle a,b\rangle}$). Z maximality $P_{\langle a,b\rangle}$ plyne, že $a \in I_c$. Proto existuje $y_c \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq c \vee y_c$. Podobně ukážeme, že existuje $y_d \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq d \vee y_d$. Položme $y = y_c \vee y_d$. Protože je $P_{\langle a,b\rangle}$ ideál, platí, že $y \in P_{\langle a,b\rangle}$. Z distributivity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že

$$a \leq (c \vee y) \wedge (d \vee y) = (c \wedge d) \vee y \in P_{\langle a,b\rangle}.$$

To je spor neboť z $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$ plyne, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$. □

Symbolem $\boldsymbol{C_n}$ označme n-prvkový totálně uspořádaný svaz.



Obrázek 1. Totálně uspořádané svazy

Lemma 4.2. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Je-li P prvoideál svazu $\boldsymbol{A}$, je dán předpisem*

$$\varphi_P(a) := \begin{cases} 0 & \textit{jestliže } a \in P \\ 1 & \textit{jestliže } a \notin P \end{cases} \tag{4.1}$$

svazový homomorfismus $\varphi_P \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Naopak $\varphi^{-1}(0)$ je prvoideál pro každý homomorfismus $\varphi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Důkaz. Z toho, že P je ideál, snadno nahlédneme, že zobrazení φ_P zachovává spojení. Protože je P prvoideál, je $\boldsymbol{A} \setminus P$ filtr. Odtud plyne, že φ_P zachovává průseky. Proto je zobrazení φ_P určené přepisem (4.1) svazový homomorfismus.

Je-li $\varphi\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$ svazový homomorfismus, je $\varphi^{-1}(0)$ ideál a $\varphi^{-1}(1) = \boldsymbol{A} \setminus \varphi^{-1}(0)$ filtr. Proto je množina $\varphi^{-1}(0)$ prvoideálem. □

Věta 4.3. *Každý distributivní svaz lze vnořit do kartézské mocniny svazu* $\boldsymbol{C_2}$.

Důkaz. Položme
$$A_{\not\leq} := \{\langle a, b\rangle \mid a \not\leq b \text{ v } \boldsymbol{A}\}.$$
Podle Lemmatu 4.1 existuje pro každou dvojici $\langle a, b\rangle \in A_{\not\leq}$ prvoideál $P_{\langle a,b\rangle}$ takový, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Vzhledem k Lemmatu 4.2 je zobrazení
$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\not\leq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}^{A_{\not\leq}}$$
svazovým homomorfismem. Je-li $a \not\leq b$ v $\boldsymbol{A}$, platí rovnosti $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) = 1$ a $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b) = 0$. Proto
$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\not\leq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) \neq \prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\not\leq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b).$$
Odtud je vidět, že je součin $\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\not\leq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}$ vnoření. □

Z Věty 4.3 plyne, že varieta $\mathcal{D}$ distributivních svazů je generovaná dvouprvkovým svazem. Protože každá netriviální varieta svazů[1] obsahuje nutně dvouprvkový svaz, tvoří distributivní svazy nejmenší netriviální svazovou varietu. To také znamená, že každá svazová identita, která platí ve dvouprvkovém svazu platí ve všech distributivních svazech.

[1] Různá od variety $\{\bullet\}$ obsahující jen jednoprvkový svaz.