PŘEDNÁŠKA 3
Distributivní svazy I

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Nejprve popíšeme rovnosti charakterizující distributivitu svazů. Ukážeme, že svaz je distributivní právě když

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

pro všechna x, y, z. Nakonec ukážeme, že modulární svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.

3.1. **Rovnosti charakterizující distributivitu.**

Lemma 3.1. *Pro svaz $\boldsymbol{A}$ jsou následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$,
(2) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. ((1) → (2)): Vhodnou aplikací absorpce a podmínky (1) dostaneme:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= a \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

Implikaci ((2) → (1)) ukážeme obdobně. □

Definice. Řekneme, že svaz je *distributivní* jestliže splňuje vzájemně ekvivalentní podmínky (1) a (2).

Lemma 3.2. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní právě když platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \tag{3.1}$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. (⇒) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Potom platí, že

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

(⇐) Předpokládejme, že rovnost (3.1) platí pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Nejprve ukážeme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \le c$. Potom $a = a \wedge c$, $c = a \vee c$ a rovnost (3.1) je tvaru

$$(a \wedge b) \vee a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \wedge (b \vee c). \tag{3.2}$$

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 22 října 2018.

Protože $a \leq c$, je navíc $a \wedge b \leq b \wedge c$ a podobně $a \vee b \leq b \vee c$. Z rovnosti (3.2) proto dostaneme, že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Ukázali jsme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární.

Nechť jsou nyní $a, b, c, \in \boldsymbol{A}$ libovolné. Položme

$$u = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$
$$v = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Protože $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, dostaneme z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) \vee v &= \big(a \vee (b \wedge c)\big) \vee \big((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\big) \\ &= \big(a \vee (b \wedge c) \vee (b \vee c)\big) \wedge \big((a \vee b) \wedge (a \vee c)\big) \\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Snadno nahlédneme, že $u \leq a \vee (b \wedge c)$. Proto platí, že

$$a \vee (b \wedge c) \vee u = a \vee (b \wedge c). \tag{3.4}$$

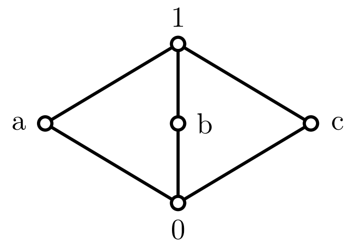
Pokud $u = v$, dostaneme z rovností (3.3) a (3.4), že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Proto je svaz $\boldsymbol{A}$ distributivní. □

3.2. **Zakázaný podsvaz $\boldsymbol{M_3}$.** Distributivní svazy jsou charakterizovány splňováním identit. Proto tvoří varietu. Budeme ji značit $\mathcal{D}$. Všimněme si, že je-li $a \leq c$, potom $a \vee c = c$. Proto v tomto případě dostaneme z distributivity, že

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Proto je každý distributivní svaz modulární.

Uvažme svaz $\boldsymbol{M_3}$ znázorněný na následujícím Obrázku 1:



Obrázek 1. Svaz $\boldsymbol{M_3}$

Svaz $\boldsymbol{M_3}$ zřejmě neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ a proto je modulární. Zároveň ale v $\boldsymbol{M_3}$ platí, že

$$a \vee (b \wedge c) = a < 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Proto tento svaz není distributivní.

Cvičení 3.1. *Ukažte, že $\boldsymbol{M_3}$ je izomorfní svazu všech podgrup Abelovy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Lemma 3.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz, $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Položme*

$$\begin{aligned} v &:= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ u &:= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\ a_1 &:= (a \vee u) \wedge v, \\ b_1 &:= (b \vee u) \wedge v, \\ c_1 &:= (c \vee u) \wedge v. \end{aligned}$$

Pokud $u < v$, potom tvoří prvky u, v, a_1, b_1, c_1 podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned} a_1 = (a \vee u) \wedge v &= (a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge v = (a \vee (b \wedge c)) \wedge v \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že

$$b_1 = (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c), \text{ a že } c_1 = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b).$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b_1 &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c) \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)). \end{aligned}$$

Jistě je $b \wedge c \leq b \vee (a \wedge c)$ a proto z modularity dostaneme

$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c).$$

Vzhledem k modularitě a nerovnosti $a \wedge c \leq a$ platí, že

$$(a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = u.$$

Obdobně bychom ukázali, že $u = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1$. Snadno nahlédneme, že $u \leq v$. Z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme rovnosti

$$a_1 = (a \wedge v) \vee u, \quad b_1 = (b \wedge v) \vee u \quad \text{a} \quad c_1 = (c \wedge v) \vee u.$$

Zaměníme-li operace průseku a spojení, ukážeme obdobně jako výše, že

$$v = a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1.$$

Z nerovnosti $u < v$ již snadno odvodíme, že jsou prvky a_1, b_1, c_1 neporovnatelné. Prot tvoří spolu s u a v podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{M_3}$. □

Z Lemmatu 2.4 plyne, že modulární svaz, ve kterém existují prvky a, b, c takové, že $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$. Protože svaz $\boldsymbol{M_3}$ není distributivní, dostáváme z Lemmatu 3.2, že

Věta 3.4. *Modulární svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.*

Společně s Větou 2.5 dostaneme, že

Důsledek 3.5. *Svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ nebo svazu $\boldsymbol{M_3}$.*