PŘEDNÁŠKA 2
Modulární svazy

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Definujeme modulární svazy a ukážeme, že všechny modulární svazy tvoří varietu. Definujeme modulární svazy a ukážeme, že svazy podmodulů a normálních podgrup jsou modulární. Naopak svaz všech podgrup modulární být nemusí. Nakonec popíšeme pětiprvkový nemodulární svaz $\boldsymbol{N_5}$ a ukážeme, že svaz je modulární právě když $\boldsymbol{N_5}$ není jeho podsvazem.

2.1. **Modularita.** Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *modulární* pokud pro každé $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq c$, platí rovnost

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c. \tag{2.1}$$

Všimněme si, že nerovnost

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$$

platí za předpokladu $a \leq c$ v každém svazu. Proto jsou modulární svazy charakterizovány právě tím, že platí opačná nerovnost. Z výše uvedené definice není patrné, že modulární svazy tvoří varietu neboť podmínka v předchozí definici je implikací, nikoliv identitou. To, že je možné nahradit tuto implikaci identitou ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.1. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když*

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c \tag{2.2}$$

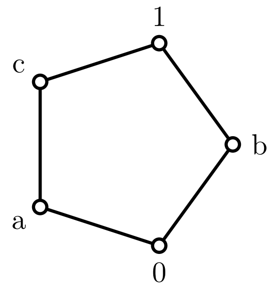
pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární a položme $a' = a \wedge c$. Protože $a' = (a \wedge c) \leq c$, dostáváme, že $a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge c$ což odpovídá identitě (2.2).

Naopak předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ splňuje identitu (2.2). Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \leq c$. Potom $a = a \wedge c$ a po dosazení do (2.2) dostaneme rovnosti $a \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge c$, tedy svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. □

Vidíme tedy, že třída všech modulárních svazů je varietou a tedy je uzavřena na podsvazy, direktní součiny a homomorfní obrazy. Varietu všech modulárních svazů budeme dále značit $\mathcal{M}$.

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 15 října 2018.



Obrázek 1. Svaz $\boldsymbol{N_5}$

Tvrzení 2.2. *Buď $\boldsymbol{R}$ okruh a $\boldsymbol{M}$ nějaký $\boldsymbol{R}$-modul. Potom je svaz všech podmodulů modulu $\boldsymbol{M}$ modulární. Speciálně je modulární svaz všech podprostorů libovolného vektorového prostoru nebo svaz všech podgrup libovolné Abelovy grupy.*

Důkaz. Připomeňme, že podmoduly modulu $\boldsymbol{M}$ tvoří svaz v němž spojení podmodulů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ odpovídá jejich součtu $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} := \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y}\}$ a průseku odpovídá průnik $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$.

Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ jsou podmoduly modulu $\boldsymbol{X}$ takové, že $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$. Potom

$$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) \cap \boldsymbol{Z} = \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \text{ a } x+y \in \boldsymbol{Z}\} = \cdots .$$

Pokud $x+y \in \boldsymbol{Z}$ a $x \in \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$, tak $y = (x+y) - x \in \boldsymbol{Z}$. Proto máme,

$$\cdots = \{x+y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}\} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}).$$

□

Tvrzení 2.3. *Svaz všech normálních podgrup libovolné grupy je modulární.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{G}$ grupa. Normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ tvoří svaz, v němž spojení dvou normálních podgrup $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{K}$ odpovídá jejich součin $\boldsymbol{HK} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K}\}$ a průseku odpovídá jejich průnik. Nechť $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ takové, že $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{L}$. Potom $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H}, y \in \boldsymbol{K} \text{ a } xy \in \boldsymbol{L}\}$. Protože $y = x^{-1}(xy) \in \boldsymbol{HL} \subseteq \boldsymbol{L}$, odkud $y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$, dostáváme, že $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} = \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}\} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L})$. □

2.2. **Zakázaný podsvaz $\boldsymbol{N_5}$.** Svaz $\boldsymbol{N_5}$ na následujícím obrázku není modulární:

Je totiž $a \leq c$ a zároveň $a \vee (b \wedge c) = a < c = (a \vee b) \wedge c$.

V souvislosti s Tvrzením 2.3 poznamenejme, že svaz všech podgrup modulární být nemusí. Uvažme například grupu $\boldsymbol{S_4}$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a její podgrupy: $\boldsymbol{A}$ generovanou transpozicí $(1, 2)$, $\boldsymbol{B}$ generovanou čtyř-cyklem $(1, 2, 3, 4)$ a $\boldsymbol{C}$ generovanou transpozicemi $(1, 2)$ a $(3, 4)$. Snadno nahlédneme, že tyto podgrupy spolu s triviální podgrupou a celou grupou $\boldsymbol{S_4}$ tvoří podsvaz svazu všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$, který je izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. Proto svaz všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$ není modulární.

Lemma 2.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz obsahující prvky a, b, c takové, že*

$$c \wedge b \leq a < c \leq a \vee b. \tag{2.3}$$

Potom prvky $c \wedge b, a, b, c, a \vee b$ tvoří podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.

Důkaz. Jestliže $a \leq b$, pak $b = a \vee b$ a tedy $c = c \wedge (a \vee b) = c \wedge b \leq a$. Pokud $b \leq a$, dostaneme $c \leq a \vee b = a$. V obou případech dostáváme nerovnost $c \leq a$, která je ve sporu s (2.3). Proto jsou prvky a a b neporovnatelné. Odtud plyne, že $a \wedge b < a$. Z (2.3) snadno nahlédneme, že $c \wedge b = a \wedge b$. Podobně ukážeme, že prvky b a c jsou neporovnatelné, a že $c < a \vee b = c \vee b$. Proto je množina $B := \{c \wedge b, a, b, c, a \vee b\}$ pěti-prvková a zbývá ověřit, že je uzavřena na suprema a infima. Jediné dvouprvkové podmnožiny množiny B jejichž prvky jsou neporovnatelné jsou $\{a, b\}$ a $\{b, c\}$. Vzhledem k (2.3) je $a \wedge b = c \wedge b \in B$ a $c \vee b = a \vee b \in B$. □

Věta 2.5. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Z definice plyne, že třída modulárních svazů je uzavřena na podsvazy (ukázali jsme dokonce, že modulární svazy tvoří varietu). Podsvaz modulárního svazu proto nemůže být izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$, který modulární není.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ není modulární. Potom existují $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq c$ a $a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c$. Položme $a' := a \vee (b \wedge c)$ a $c' := (a \vee b) \wedge c$. Potom je $b \wedge c' = b \wedge (a \vee b) \wedge c = b \wedge c \leq a \vee (b \wedge c) = a'$ a podobně $c' = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b = a \vee b \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \vee b = a' \vee b$. Podle Lemmatu 2.3 tvoří množina $\{c' \wedge b, a', b, c', a' \vee b\}$ podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. □