PŘEDNÁŠKA 1
Definice svazu

PAVEL RŮŽIČKA

Abstrakt. Definujeme svaz jako algebru se dvěma komutativními a asociativními operacemi průseku a spojení, které jsou svázány axiomem absorpce. Ukážeme, že svazy odpovídají uspořádaným množinám se supremy a infimy neprázdných konečných podmnožin. Dále definujeme modulární svazy a ukážeme, že svazy podmodulů a normálních podgrup jsou modulární. Naopak svaz všech podgrup modulární být nemusí.

1.1. **Infima a suprema.** Buď A množina uspořádaná relací $\leq$. *Supremem* podmnožiny $X \subseteq A$ budeme rozumět nejmenší $s \in A$ takové, že $x \leq s$ pro všechna $x \in X$. Podobně *infimem* množiny X budeme rozumět největší $i \in A$ takové, že $i \leq x$ pro všechna $x \in X$. Supremum, resp. infimum množiny X budeme značit $\sup X$, resp. $\inf X$. Obecně nemusí suprema a infima konečných podmnožin uspořádané množiny existovat. Všimněme si ještě, že podle definice je supremum prázdné množiny největší prvek množiny A a podobně infimum prázdné množiny je největší prvek množiny A.

Lemma 1.1. *Buď A částečně uspořádaná množina. Nechť X a Y jsou její podmnožiny takové, že existují suprema $x := \sup X$ a $y := \sup Y$. Existuje-li $\sup\{x, y\}$, potom existuje také $\sup(X \cup Y)$ a platí rovnost*

$$\sup(X \cup Y) = \sup\{x, y\}.$$

Podobně pro infima.

Důkaz. Nechť $a \in X \cup Y$. Jestliže $a \in X$ tak $a \leq \sup X = x$, pokud $a \in Y$, tak $a \leq \sup Y = y$. Proto platí, že $a \leq \sup\{x, y\}$. Je-li $s \in A$ takové, že $a \leq s$ pro každé $a \in X \cup Y$, potom z definice suprema plyne, že $x, y \leq s$. Odtud dostaneme, že $\sup\{x, y\} \leq s$. Proto $\sup\{x, y\} = \sup(X \cup Y)$. □

Lemma 1.2. *Buď A částečně uspořádaná množina. Má-li každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum (infimum), potom má každá neprázdná konečná podmnožina množiny A supremum (infimum).*

Důkaz. Předpokládejme, že má každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum a ukažme, že každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum. Případ infima je analogický. Pro spor předpokládejme, že

Přednáška se konala v Karlíně v seminární místnosti Katedry algebry, 8 října 2018.

tomu tak není. Buď n nejmenší přirozené číslo pro které existuje n-prvková podmnožina X, která nemá v A supremum. Množina X je alespoň dvouprvková, a proto je sjednocením svých neprázdných vlastních podmnožin M_1 a M_2. Množiny M_1 a M_2 mají méně než n prvků a proto mají podle indukčního předpokladu suprema. Protože existuje supremum každé dvouprvkové podmnožiny množiny A, existuje $\sup\{\sup M_1, \sup M_2\}$. Vzhledem k Lemmatu 1.1 je toto supremum rovno $\sup X$, což je ve sporu s volbou množiny X. □

1.2. **Definice svazu.** Buď A uspořádaná množina jejíž každá dvouprvková podmnožina má supremum a infimum. Na množině A definujme binární operace *spojení* , značíme "$\vee$", a *průseku*, značíme "$\wedge$", takto: $a \vee b = \sup\{a, b\}$ a $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Právě definované operace mají tyto vlastnosti:

Komutativita:
- $a \vee b = b \vee a$,
- $a \wedge b = b \wedge a$,

Asociativita:
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

Absorpce: $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$,

pro všechna $a, b, c \in A$.

Důkaz. Všechny vlastnosti plynou snadno z definic. Zcela zřejmá je komutativita. V případě spojení dostaneme s využitím Lemmatu 1.1, že

$$a \vee (b \vee c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a \vee b) \vee c.$$

Podobně postupujeme v případě průseku a tak ukážeme asociativitu. Zbývá absorpce. Podle definice máme $a \vee (a \wedge b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\}$. Protože $a \geq \inf\{a, b\}$, je $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$. Podobně $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$ a protože $a \leq \sup\{a, b\}$, platí, že $\inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$. □

Definice. Množinu A spolu s komutativními a asociativními operacemi "$\vee$" a "$\wedge$" svázanými vlastností absorpce nazveme *svazem*.

Lemma 1.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Potom platí*

(i) $a = a \vee a = a \wedge a$,
(ii) $a = a \wedge b$ *právě když* $b = a \vee b$,

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Díky absorpci platí, že $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$ a podobně $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$. Odtud plyne (i).

Předpokládejme, že $a = a \wedge b$. Potom $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$. Poslední rovnost platí opět díky absorpci. Opačnou implikaci bodu (ii) dokážeme analogicky. □

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Na množině A definujme relaci "$\leq$" takto: $a \leq b$ právě když $a = a \wedge b$ (což je podle Lemma 1.3(ii) ekvivalentní rovnosti $b = a \vee b$).

Tvrzení 1.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Relace "$\leq$" indukovaná svazovými operacemi je uspořádáním množiny A. Přitom pro všechna $a, b \in A$ platí, že $a \vee b = \sup\{a, b\}$ a $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Speciálně, každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum a infimum.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a = a \wedge b$ a zároveň $b = b \wedge c$, tj., že $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$. Potom $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, odkud je vidět, že $a \leq c$. Proto je relace "$\leq$" tranzitivní. Platí-li $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$, potom $a = a \wedge b = b$. Podle Lemmatu 1.3(i) platí, že $a = a \wedge a$, tedy $a \leq a$. Proto je relace "$\leq$" uspořádáním množiny A.

Z absorpce a komutativity plyne, že $a = a \wedge (a \vee b)$ a $b = b \wedge (a \vee b)$, odkud $a, b \leq a \vee b$. Je-li naopak $a, b \leq c$, platí podle Lemmatu 1.3(ii), že $c = a \vee c = b \vee c$. Odtud $c = a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ a proto $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Podobně ukážeme, že $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Existence infim a suprem všech neprázdných konečných podmnožin množiny A plyne z Lemmatu 1.2. $\square$

Na svaz je tak možné pohlížet jako na algebru se dvěma operacemi "$\vee$" a "$\wedge$" splňujícími příslušné axiomy nebo jako na uspořádanou množinu v níž má každá neprázdná konečná podmnožina supremum a infimum.

Definice. Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *omezený*, má-li největší a nejmenší prvek. Největší prvek svazu obvykle značíme $1_{\boldsymbol{A}}$, nejmenší pak $0_{\boldsymbol{A}}$ (nebo jen 1 a 0, je-li svaz $\boldsymbol{A}$ jednoznačně určený ze souvislosti).

Všimněme si, že je-li A uspořádaná množina a značí-li $\emptyset$ prázdnou podmnožinu A, jsou $\sup \emptyset$, resp. $\inf \emptyset$ rovny nejmenšímu, resp. největšímu prvku množiny A. Omezené svazy tedy odpovídají uspořádaným množinám, jejichž každá konečná podmnožina má supremum a infimum.

Definice. Svaz nazveme *úplným*, má-li každá jeho podmnožina infimum.

Je-li $\boldsymbol{A}$ úplný svaz a X jeho podmnožina, potom je

$$\sup X = \inf\{a \in \boldsymbol{A} \mid b \leq a \text{ pro každé } b \in X\}.$$

Proto má každá podmnožina úplného svazu také supremum. V souladu se značením binárních svazových operací budeme značit $\bigvee X$, resp. $\bigwedge X$ supremum, resp. infimum podmnožiny X uspořádané množiny A.