PŘÍKLADY Z LA
II. SEMESTR

PAVEL RŮŽIČKA

1. Skalární součin

Příklad 8.1. *Ověřte, že vektory* $\mathbf{v}_1 = (1,2,-1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2,-1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1,2,5)^T$ *jsou po dvou kolmé. Převeďte trojici* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *na ortonormální bázi* $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ *prostoru* $\mathbf{R}^3$. *a určete souřadnice vektoru* $\mathbf{u} = (1,1,1)^T$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{Q}$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že jsou vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$ po dvou kolmé. Vzhledem k symetrii skalárního součinu stačí ověřit, že jsou součiny $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_3 \rangle$ a $\langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \rangle$ nulové. Přímým výpočtem dostaneme:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \rangle &= 1.2 + 2.(-1) + (-1).0 = 2 - 2 = 0,\\
\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_3 \rangle &= 1.1 + 2.2 + (-1).5 = 1 + 4 - 5 = 0,\\
\langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \rangle &= 2.1 + (-1).2 + 0.5 = 2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Nyní položíme $\mathbf{q}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$, pro $i = 1,2,3$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_1\|^2 &= \langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_1 \rangle = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 1 + 4 + 1 = 6,\\
\|\mathbf{v}_2\|^2 &= \langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_2 \rangle = 2^2 + (-1)^2 + 0^2 = 4 + 1 = 5,\\
\|\mathbf{v}_3\|^2 &= \langle \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{v}_3 \rangle = 1^2 + 2^2 + 5^2 = 1 + 4 + 25 = 30
\end{aligned}$$

a tedy

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T,\ \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)^T,\ \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)^T.$$

Protože vektory $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{R}^3$, jsou podle Tvrzení 8.14 souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ vzhledem k této bázi rovny skalárním součinům vektoru $\mathbf{u}$ s jejími prvky. Spočteme

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1.1 + 2.1 + (-1).1) = \sqrt{\frac{2}{3}},\\
\langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2.1 + (-1).1 + 0.1) = \frac{1}{\sqrt{5}},\\
\langle \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{30}}(1.1 + 2.1 + 5.1) = 4\sqrt{\frac{2}{15}}
\end{aligned}$$

a tedy

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{Q}} = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 4\sqrt{\frac{2}{15}})^T.$$

Cvičení 8.1. *Normalizujte tyto vektory z prostoru* $\mathbf{R}^4$*:*

(a) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 2)^T$,
(b) $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 0, -2)^T$,
(c) $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 3, -1)^T$.

Řešení. $\mathbf{v}_1/\left\|\mathbf{v}_1\right\| = 1/3(1, 2, 0, 2)^T$, $\mathbf{v}_2/\left\|\mathbf{v}_2\right\| = 1/3(1, -2, 0, -2)^T$, $\mathbf{v}_3/\left\|\mathbf{v}_3\right\| = \sqrt{3}/6(1, 1, 3, -1)^T$.

Cvičení 8.2. *Pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *určete normu vektoru*

$$\mathbf{v}_n = (1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{2n-1})^T$$

prostoru $\mathbf{R}^n$.

Řešení. $\|\mathbf{v}_n\| = n$.

Problém 8.3. *Pro dvojici reálných čísel* $a < b$ *označme symbolem* $C(a, b)$ *reálný vektorový prostor všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu* $[a, b]$*. Ukažte, že předpis*

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

kde $\mathbf{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x) \in C(a, b)$ *definuje skalární součin na prostoru* $C(a, b)$.

Cvičení 8.4. *Určete normy těchto vektorů prostoru* $C(-\pi, \pi)$*:*

(a) $\mathbf{f} = \cos t$,
(b) $\mathbf{g} = \cos t + \sin t$,
(c) $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{cosnt}{2^n}$

Řešení. $\|f\| = 1/2\sqrt{\pi}$, $\|g\| = 1/\sqrt{2\pi}$, $\|h\| = 1/2\sqrt{\pi}$

Problém 8.5. *Nechť* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *je* n*-tice reálných čísel a nechť* σ *je nějaká permutace množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. Pro každé* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *položme* $b_i = a_i - a_{\sigma(i)}$*. Dokažte, že platí*

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Cvičení 8.6. *Ověřte, že vektory* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 1)^T$ *jsou po dvou kolmé. Převeďte čtveřici* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ *na ortonormální bázi* $\mathcal{Q}$ *prostoru* $\mathbf{R}^4$*. Určete souřadnice vektoru* $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ *vzhledem k této bázi.*

Řešení. $\mathcal{Q}: \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1)^T$ a $\frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,,1,1)^T$, $[\mathbf{u}]_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,3)^T$

Problém 8.7. *Dokažte, že norma $\|\star\|$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je určena skalárním součinem právě tehdy když platí*

$$2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$

pro každou dvojici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorů prostoru $\mathbf{V}$.

Problém 8.8. *Dokažte, že pro $1 \leq p$ je norma definovaná na n-dimenzionálním reálném vektorovém prostoru předpisem*

$$\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

určena skalárním součinem právě tehdy když $p = 2$.

Příklad 8.2. *Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určete ortonormální bázi podprostoru $\mathbf{W}$ prostoru $\mathbf{R}^4$ generovaného vektory $\mathbf{u}_1 = (1,2,1,0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (0,3,0,3)^T$, $\mathbf{u}_3 = (0,2,2,0)^T$.*

Řešení. Hledáme ortonormální množinu vektorů $\{\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_3\}$, která splňuje tyto podmínky

(i) $\mathcal{L}\{\mathbf{q}_1\} = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1\}$,
(ii) $\mathcal{L}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\} = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$,
(iii) $\mathcal{L}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\} = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

(V zachovávání těchto podmínek spočívá myšlenka Gramova-Schmidtova algoritmu.)

Krok 1: Spočítáme $\|\mathbf{u}_1\|^2 = 1.1 + 2.2 + 1.1 + 0.0 = 6$ a položíme

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)^T.$$

Krok 2: Nejprve spočítáme vektor

$$\mathbf{q}_2' = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{u}_2 \rangle\, \mathbf{q}_1. \tag{8.1}$$

Podle definice je

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1.0 + 2.3 + 1.0 + 0.3) = \sqrt{6}.$$

odkud, po dosazení do formule (8.1), dostaneme

$$\mathbf{q}_2' = (0,3,0,3)^T - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)^T = (-1,1,-1,3)^T.$$

Nyní spočítáme

$$\|\mathbf{q}_2'\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 3^2 = 12$$

a odtud

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2'}{\|\mathbf{q}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,-1,3)^T = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,-1,3)^T.$$

Krok 3: Nakonec určíme vektory

$$\mathbf{q}_3' = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{u}_3 \rangle \, \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{u}_3 \rangle \, \mathbf{q}_2 \tag{8.2}$$

a

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{\|\mathbf{q}_3'\|}. \tag{8.3}$$

Podle definice spočítáme

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{u}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} = (1.0 + 2.2 + 1.2 + 0.0) = \sqrt{6}$$

a

$$\langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{u}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} = ((-1).0 + 1.2 + (-1).2 + (-3).0) = 0.$$

Dosadíme do (8.2) a dostaneme

$$\mathbf{q}_3' = (0,2,2,0)^T - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)^T = (0,2,2,0)^T - (1,2,1,0)^T = (-1,0,1,0)^T.$$

Je ihned vidět, že $\|\mathbf{q}_3'\| = \sqrt{2}$ a tak, po dosazení do (8.3) dostaneme, že

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{\|\mathbf{q}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)^T.$$

Sami již ověřte, že množina $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ je ortonormální a platí podmínky (i), (ii) a (iii). □

Příklad 8.3. *Určete souřadnice vektoru* $\mathbf{w} = (0,1,-2,3)^T$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ *podprostoru* $\mathbf{W}$.

Řešení. Nejprve si všimněme, že $\mathbf{w} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ a tedy $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Protože vektory $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ tvoří ortonormální bázi podprostoru $\mathbf{W}$, jsou souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ vzhledem k této bázi určeny skalárními součiny $\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{w} \rangle$, $\langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{w} \rangle$, $\langle \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{w} \rangle$. Přímým výpočtem dostaneme,že

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}},\ \langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{w} \rangle = \frac{-6}{2\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \text{ a } \langle \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{w} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

a tedy $[\mathbf{w}]_{\mathcal{Q}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{3}, -\sqrt{2})$. □

Příklad 8.4. *Určete souřadnice ortogonální projekce* $\mathbf{P_W}(\mathbf{e}_1)$ *vektoru* $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)^T$ *na podprostor* $\mathbf{W}$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$. *Určete souřadnice tohoto průmětu vzhledem ke standardní bázi prostoru* $\mathbf{R}^4$.

Řešení. Protože je $\mathcal{Q}$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{W}$, jsou souřadnice vzhledem k této bázi ortogonální projekce vektoru $\mathbf{e}_1$ na podprostor $\mathbf{W}$ určeny skalárními součiny $\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{e}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{e}_1 \rangle$ a $\langle \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{e}_1 \rangle$ (Dokažte!). Platí

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}, \ \langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \ \langle \mathbf{q}_3 \mid \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

odkud dostáváme, že $[\mathbf{P}_{\mathbf{W}}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{Q}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})^T$. Zbývá určit souřadnice vektoru $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}(\mathbf{e}_1)$ vzhledem ke standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbf{R}^4$. K tomu stačí spočítat lineární kombinaci

$$[\mathbf{P}_{\mathbf{W}}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathbf{q}_i \mid \mathbf{e}_1 \rangle \, \mathbf{q}_i. \tag{8.4}$$

Po dosazení do (8.4) dostaneme, že

$$[\mathbf{P}_{\mathbf{W}}(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{4}(3, 1, -1, -1)^T.$$

$\square$

Cvičení 8.9. *Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určete ortonormální bázi* $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ *podprostoru prostoru* $\mathbf{R}^4$ *generovaného vektory* $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, 0)^T$.

Řešení. $\mathbf{q}_1 = 1/2(1, 1, 1, 1)^T, \mathbf{q}_2 = 1/2(1, -1, 1, -1)^T, \mathbf{q}_3 = 1/2(1, 1, -1, -1)^T$.

Cvičení 8.10. *Jak se změní výsledek Cvičení 8.9 nahradíme-li vektor* $\mathbf{v}_2$ *vektorem* $-\mathbf{v}_2$*?*

Řešení. Dostaneme $\mathbf{q}_1$, $-\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$.

Cvičení 8.11. *Pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určete ortonormální bázi* $\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ *podprostoru prostoru* $C(-1, 1)$ *generovaného vektory* 1, x, x^2.

Řešení. $\mathbf{f}_0 = 1$, $\mathbf{f}_1 = \sqrt{3}x$, $\mathbf{f}_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Problém 8.12. *Nechť* $\mathbf{V}$ *je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Nechť* $\mathbf{W}$ *je podprostor prostoru* $\mathbf{V}$ *a nechť* $\mathcal{O} = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_m\}$ *je ortonormální báze podprostoru* $\mathbf{W}$*. Dokažte, že pro každý vektor* $\mathbf{v}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *jsou* $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{q}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{q}_m \rangle$ *souřadnice ortogonální projekce vektoru* $\mathbf{v}$ *na podprostor* $\mathbf{W}$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{O}$.

Příklad 8.5. *Určete ortogonální doplněk podprostoru* $\mathbf{W}$ *prostoru* $\mathbf{R}^4$ *generovaného vektory* $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, 0)^T$ *a* $\mathbf{v}_3 = (-1, -1, -1, 1)^T$.

Řešení. Uvažme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Potom je podprostor $\mathbf{W}$ roven sloupcovému prostoru matice $\mathbf{A}$ a podle Věty 8.24 je

$$\mathbf{W}^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{W})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T).$$

Ortogonální doplňek prostoru $\mathbf{W}$ je tedy roven podprostoru všech řešení homogenní soustavy rovnic určené maticí

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matici $\mathbf{A}^T$ upravíme do řádkově odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odkud určíme hledaný prostor všech řešení dané homogenní soustavy rovnic jako lineární obal vektorů $(1,1,-2,0)^T$ a $(-1,0,2,1)^T$. Tedy

$$\mathbf{W}^\perp = \mathcal{L}\{(1,1,-2,0)^T,\ (-1,0,2,1)^T\}.$$

□

Cvičení 8.13. *Určete ortogonální doplněk podprostoru prostoru* $\mathbf{R}^3$ *generovaného vektory* $(1,1,1)^T$ *a* $(1,2,2)^T$. *Načrtněte si obrázek.*

Řešení. $\mathcal{L}\{(0,1,-1)^T\}$.

Cvičení 8.14. *Určete ortogonální doplněk k lineárnímu obalu vektorů* $(1,-1,1,0,1)^T$, $(0,1,-1,1,0)^T$ *a* $(2,1,2,0,-1)^T$ *v prostoru* $\mathbf{R}^5$.

Řešení. $\mathcal{L}\{(-1,0,1,1,0)^T, (-1,1,1,0,1)^T\}$.

Příklad 8.6. *Určete ortogonální projekci vektoru* $\mathbf{b} = (1,0,1,0)^T$ *na lineární obal vektorů*

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,1)^T,\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0)^T,\ \mathbf{u}_3 = (1,1,1,0)^T.$$

Řešení. Symbolem $\mathbf{U}$ označme lineární obal vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$. Hledáme vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ takový, že $\mathbf{b} - \mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp$ ($\mathbf{U}^\perp$ značí ortogonální doplněk podporstoru $\mathbf{U}$). Vektor $\mathbf{v}$ najdeme tak, že určíme jeho souřadnice x_1, x_2, x_3 vzhledem k bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ prostoru $\mathbf{U}$. Pro každé $i = 1,2,3$ platí

$$\langle \mathbf{b} - \mathbf{v} \mid \mathbf{u}_i \rangle = 0,$$

odkud
$$\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{u}_i \rangle$$
a tedy
$$\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_i \rangle\, x_1 + \langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_i \rangle\, x_2 + \langle \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_i \rangle\, x_3 = \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_i \rangle\,.$$
Souřadnice x_1, x_2, x_3 tak určíme ze soustavy rovnic
$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle\, x_1 + \langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \rangle\, x_2 + \langle \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_1 \rangle\, x_3 = \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_1 \rangle \\
&\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \rangle\, x_1 + \langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_2 \rangle\, x_2 + \langle \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_2 \rangle\, x_3 = \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_2 \rangle \\
&\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_3 \rangle\, x_1 + \langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \rangle\, x_2 + \langle \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_3 \rangle\, x_3 = \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_3 \rangle\,,
\end{aligned} \tag{8.5}$$
jejíž koeficienty můžeme přímo spočítat (využíváme symetrie skalárního součinu).
$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle = 3,\ \langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \rangle = -1,\ \langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_3 \rangle = 0, \\
\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_2 \rangle = 2,\ \langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_3 \rangle = 2,\ \langle \mathbf{u}_3 \mid \mathbf{u}_3 \rangle = 3, \\
\langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_1 \rangle = 0,\ \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_2 \rangle = 1,\ \langle \mathbf{b} \mid \mathbf{u}_3 \rangle = 2.
\end{gathered}$$
Zbývá vyřešit soustavu (8.5):
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right),$$
odkud dostaneme, že $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$ a tedy
$$\mathbf{v} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že jestliže označíme symbolem $\mathbf{A}$ matici, jejíž sloupce jsou tvořeny po řadě vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ bude soustava (8.5) odpovídat soustavě
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

□

Cvičení 8.15. *Určete ortogonální projekci* $\mathbf{v}'$ *vektoru* $\mathbf{v} = (1, 2, 2, -1, 1)^T$ *na podprostor prostoru* $\mathbf{R}^5$ *generovaný vektory* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 0, 1, 0)^T$.

Řešení. $\mathbf{v}' = (1, 0, 0, -1, 0)^T$.

Cvičení 8.16. *Určete ortogonální projekci* $\mathbf{f}'$ *vektoru* $\mathbf{f} = x^4$ *na podprostor prostoru* $C(-1,1)$ *generovaný vektory* 1, x, x^2 *a* x^3.

Řešení. $\mathbf{f}' = x^2/7 + 1/5$.

Problém 8.17. *Buď* $\mathbf{P}$ *podprostor prostoru* $C(-1,1)$ *generovaný všemi polynomy. Určete ortogonální doplněk podprostoru* $\mathbf{X}$ *prostoru* $\mathbf{P}$ *generovaného polynomy* 1, x^2, $x^4, \dots$.

Příklad 8.7. *Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Hledáme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{b}$ na podprostor $\mathbf{M} = \mathcal{S}(\mathbf{A})$. Souřadnice této projekce vzhledem k bázi prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ tvořené sloupci matice $\mathbf{A}$ nalezneme jako řešení soustavy

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{8.6}$$

Spočteme součiny $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do (8.6) a soustavu vyřešíme. Upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

a zpětnou substitucí spočítáme, že $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 1$. Nakonec určíme projekci $\mathbf{P_M}(\mathbf{b})$ vektoru $\mathbf{b}$ na podprostor $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{P_M}(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{A}_{i*} x_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 8.8. *Určete QR-rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a metodou nejmenších čtverců řešte soustavu

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Řešení. Hledáme matici $\mathbf{Q}$ typu 4×3 jejíž sloupce tvoří ortonormální množinu a horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{R}$ typu 3×3 s kladnými prvky na diagonále tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

Nejprve najdeme matici $\mathbf{Q}$. Snadno lze ověřit, že sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi $\mathbf{s}_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $\mathbf{s}_2 = (0, 2, 1, 1)^T$, $\mathbf{s}_3 = (-1, 1, -3, 1)^T$ prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$. Tuto bázi transformujeme pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu v ortonormální bázi $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$. Vektory této báze budou tvořit sloupce matice $\mathbf{Q}$.

Krok 1: Platí

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{s}_1}{\|\mathbf{s}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)^T.$$

Krok 2: Vektor $\mathbf{q}_2'$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{q}_2' = \mathbf{s}_2 - \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_2 \rangle \, \mathbf{q}_1.$$

Spočítáme

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)^T \mid (0, 2, 1, 1)^T \right\rangle = \sqrt{3}$$

a po dosazení dostaneme

$$\mathbf{q}_2' = (0, 2, 1, 1)^T - \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)^T = (-1, 1, 0, 1)^T.$$

Vidíme, že $\|\mathbf{q}_2'\| = \sqrt{3}$ a tedy

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{q}_2'}{\|\mathbf{q}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1)^T.$$

Krok 3: Vektor $\mathbf{q}_3'$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{q}_3' = \mathbf{s}_3 - \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_3 \rangle \, \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{s}_3 \rangle \, \mathbf{q}_2. \tag{8.7}$$

Platí

$$\langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)^T \mid (-1,1,-3,1)^T \right\rangle = -\sqrt{3}$$

a

$$\langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{s}_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0,1)^T \mid (-1,1,-3,1)^T \right\rangle = \sqrt{3}.$$

Dosadíme do (8.7) a tak dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3' &= (-1,1,-3,1)^T - (-\sqrt{3})\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)^T - \sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0,1)^T \\ &= (-1,1,-3,1)^T + (1,1,1,0)^T - (-1,1,0,1)^T = (1,1,-2,0)^T.\end{aligned}$$

Nakonec spočítáme $\|\mathbf{q}_3'\| = \sqrt{6}$ a položíme

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{q}_3'}{\|\mathbf{q}_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)^T.$$

Jak bylo řečeno na začátku tvoří vektory $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ a $\mathbf{q}_3$ sloupce matice $\mathbf{Q}$ a tedy

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matici $\mathbf{R}$ můžeme určit přímo, neboť platí

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{s}_1\| & \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_2 \rangle & \langle \mathbf{q}_1 \mid \mathbf{s}_3 \rangle \\ 0 & \|\mathbf{q}_2'\| & \langle \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{s}_3 \rangle \\ 0 & 0 & \|\mathbf{q}_3'\|\,. \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

Pokud si vztah (8.8) nepamatujeme, můžeme určit matici $\mathbf{R}$ na základě následující úvahy: Sloupce matice $\mathbf{Q}$ tvoří ortonormální množinu a tedy

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3. \tag{8.9}$$

Odtud a ze vztahu

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

plyne, že

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}.$$

Tj.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Zbýva vyřešit metodou nejmenších čtverců soustavu

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{8.10}$$

Snadno bychom ověřili, že vektor $\mathbf{b}$ neleží v prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ a proto nemá soustava (8.10) řešení. Budeme hledat vektor $\mathbf{x}$ tak, aby byla $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimální, což nastane právě tehdy když bude vektor $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ ležet v ortogonálním doplňku prostoru $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, tj. právě tehdy když bude platit

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0,$$

odkud

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{8.11}$$

Rovnici (8.11) bychom mohli řešit přímo, my však máme rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$! Po dosazení do (8.11) za $\mathbf{A}$ dostaneme, že

$$(\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\mathbf{x} = (\mathbf{QR})^T\mathbf{b},$$

odkud

$$\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}.$$

Nyní použijeme vztah (8.9) a dostaneme, že

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}.$$

Matice $\mathbf{R}^T$ je dolní trojúhelníková s kladnými prvky na diagonále a proto je regulární. Můžeme s ní tedy krátit a dostaneme konečně

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}. \tag{8.12}$$

Soustavu (8.12) vyřešíme přímo zpětnou substitucí. V našem konkrétním případě máme

$$\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zpětnou substitucí dostaneme, že $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$. $\square$

Cvičení 8.18. *Určete QR-rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 8.19. *Určete QR-rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 15 & 12 & -16 \\ 20 & -9 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 8.20. *Nechť*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

je reálná matice a $\mathbf{b} = (4, 2, 0, 2)^T$ *je vektor.*

(a) *Určete QR-rozklad matice* $\mathbf{A}$.

(b) *Metodou nejmenších čtverců řešte soustavu rovnic* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Řešení. (a)

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

9. Determinanty

Problém 9.1. *Dokažte, že permutace $p \in S_n$ je sudá právě když má sudý počet cyklů sudé délky a lichá právě když má lichý počet cyklů sudé délky.*

Příklad 9.1. *Určete znaménko permutace*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 12 & 11 & 8 & 1 & 3 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení 1. Permutaci p rozložíme v součin transpozic (transpozice skládáme zprava doleva jako zobrazení). Například

$$p = (6,11)(1,8)(1,7)(1,10)(1,12)(1,5)(1,3)(1,9)(1,4)(1,2).$$

Počet transpozic v tomto rozkladu je sudý a proto je $\operatorname{sgn} p = 1$. $\square$

Řešení 2. Permutaci p rozložíme v součin nezávislých cyklů (tento rozklad je až na pořadí cyklů jednoznačný):

$$p = (6,11)(1,2,4,9,3,5,12,10,7,8).$$

Vidíme, že se permutace $p \in S_{12}$ rozkládá v součin dvou nezávislých cyklů a proto je $\operatorname{sgn} p = (-1)^{12-2} = 1$, tj. permutace p je sudá. $\square$

Řešení 3. Permutaci p opět rozložíme v součin nezávislých cyklů:

$$p = (6,11)(1,2,4,9,3,5,12,10,7,8).$$

Ve výsledném rozkladu jsou dva sudé cykly a proto je permutace p, podle Problému 9.1, sudá. $\square$

Cvičení 9.2. *Určete znaménka těchto permutací:*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 8 & 7 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 4 & 5 & 9 & 7 & 11 & 8 & 6 & 3 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 8 & 11 & 12 & 4 & 9 & 2 & 7 & 6 & 13 & 15 & 1 & 10 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Permutace mají tato znaménka: $\operatorname{sgn} p = -1$, $\operatorname{sgn} q = 1$ a $\operatorname{sgn} r = -1$.

Cvičení 9.3. *Spočtěte determinanty*

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Řešení. Platí $d_1 = -6$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$.

Problém 9.4. *Dokažte, že determinant horní (dolní) trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na její diagonále.*

Příklad 9.2. *Spočtěte determinant matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matici **A** upravíme pomocí elementárních řádkových úprav na horní trojúhelníkový tvar a potom vynásobíme prvky na diagonále výsledné matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

□

Příklad 9.3. *Spočtěte determinant matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Strategie: Matici **A** budeme upravovat pomocí elementárních řádkových nebo sloupcových úprav. V případě, že dostaneme sloupec nebo řádek ve kterém je dostatečně mnoho nul tak determinant podle tohoto sloupce rozvineme.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Výsledný determinant rozvineme podle pátého sloupce. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{1+5} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nyní rozvineme podle prvního sloupce a upravíme:

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -7 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nakonec rozvineme podle druhého sloupce

$$\det \mathbf{A} = -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

a spočítáme podle definice

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot (3 \cdot (-1) - (-3) \cdot (-7)) = 2(-24) = -48.$$

Cvičení 9.5. *Spočtěte nejprve úpravou na trojúhelníkový tvar, potom úpravami a postupným rozvojem podle vhodných řádků a sloupců determinanty d_1 a d_2:*

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Řešení. $d_1 = 6$ a $d_2 = 2$.

Příklad 9.4. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočtěte*

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Řešení. Rozvineme-li determinant d_n podle prvního řádku, dostaneme

$$d_n = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{d_{n-1}} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Rozvneme-li druhý ze sčítanců opět podle prvního řádku, dostaneme, že

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{d_{n-2}} + 0.$$

Je tedy

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}. \tag{9.1}$$

Snadno spočítáme, že $d_1 = 2$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ a postupným dosazováním do (9.1) dostaneme, že $d_3 = 4$, $d_4 = 5$, $d_5 = 6$, atd. Nyní indukcí snadno ukážeme, že $d_n = n + 1$. □

Zatím bez důkazu, důkaz uvedeme v následující kapitole (Příklad 10.7), si uveďme vztahy, které lze využít při výpočtu následujících dvou cvičení. Nechť je dán rekurentní vztah

$$d_n = ad_{n-1} + bd_{n-2} \tag{9.2}$$

a hodnoty d_1, d_2. Jsou-li α, β kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0,$$

potom jesliže $\alpha \neq \beta$, tak

$$d_n = \alpha^n c_1 - \beta^n c_2, \tag{9.3}$$

kde

$$c_1 = \frac{d_2 - \beta d_1}{\alpha(\alpha - \beta)} \quad a \quad c_2 = \frac{d_2 - \alpha d_1}{\beta(\alpha - \beta)}$$

a jestliže $\alpha = \beta$, tak platí

$$d_n = (n-1)\alpha^{n-2} d_2 - (n-2)\alpha^{n-1} d_1. \tag{9.4}$$

Poznamenejme ještě, že v Příkladu 9.4 je $\alpha = \beta = 1$ a tedy

$$d_n = (n-1) \cdot 3 - (n-2) \cdot 2 = n + 1.$$

Cvičení 9.6. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočtěte determinant*

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n \times n} .$$

Řešení.

$$d_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right).$$

Cvičení 9.7. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočtěte determinant*

$$d_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n \times n} .$$

Řešení. $d_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Příklad 9.5. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ spočtěte determinant*

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}_{n \times n} ,$$

kde $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ (sami si můžete zkusit vyřešit případ, kdy $x = a_i$ pro některé $i = 1, \dots, n$).

Řešení 1 (Převedením na dolní trojúhelníkový tvar). Matici jejíž determinant počítáme převedeme pomocí elementárních úprav na dolní trojúhelníkový tvar. Nejprve odečteme od druhého až n-tého sloupce první sloupec.

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x-a_1 & x-a_1 & \dots & x-a_1 \\ x & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix} .$$

Nyní z i-tého řádku vytkneme výraz $a_i - x$. Dostaneme

$$d_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \frac{x}{a_2-x} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x}{a_3-x} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x}{a_n-x} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Teď k prvnímu řádku přičteme součet zbývajících řádků. Dostaneme, že

$$d_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\begin{vmatrix} \xi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x}{a_2-x} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x}{a_3-x} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x}{a_n-x} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

kde

$$\xi = \frac{a_1}{a_1 - x} + \sum_{j=2}^{n} \frac{x}{a_j - x} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{x}{a_j - x}.$$

Vynásobením prvků na diagonále výsledné matice dostaneme nakonec, že

$$d_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{x}{a_j - x}\right).$$

□

Řešení 2 (Rekurzí). Determinant d_n *důmyslně* rozložíme podle posledního řádku:

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x \end{vmatrix}.$$

První ze sčítanců rozvineme podle posledního řádku, ve druhém odečteme poslední řádek od každého z řádků, který leží nad ním. Po těchto úpravách dostaneme, že

$$d_n = (a_n - x)\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_{n_1} \end{vmatrix}}_{d_{n-1}} + \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_n - x)d_{n-1} + x\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - x).$$

Indukcí snadno ověříme, že

$$d_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x) + \sum_{j=1}^{n} x \prod_{i=1, i\neq j}^{n}(a_i - x).$$

Vytkneme-li $\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)$, dostaneme

$$d_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left(1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{x}{a_j - x}\right).$$

□

Řešení 3. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{pmatrix}$$

jsou matice. Pro $j = 1, \dots, n$ označme $\mathbf{A}_j$ matici která vznikne tak, že v matici $\mathbf{A}$ nahradíme j-tý sloupcec vektorem $(x, x, \dots, x)^T$. Rozmyslete si, že platí

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n} \det \mathbf{A}_j. \tag{9.5}$$

Položme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{pmatrix}.$$

Potom $d_n = \det \mathbf{B}$ a snadno ověříme, že pro každé $j = 1, \dots, n$ je

$$\det \mathbf{A}_j = x \prod_{i=1,\ i\neq j}^{n}(a_i - x).$$

Podle (9.5) je

$$d_n = \det \mathbf{A} + \sum_{j=1}^{n}\det \mathbf{A}_j = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x) + \sum_{j=1}^{n} x \prod_{i=1,\ i\neq j}^{n}(a_i - x).$$

□

Cvičení 9.8. *Nechť* $a_1, \dots, a_n$ *jsou taková reálná čísla, že* $a_1 \cdots a_n \neq 0$. *Spočtěte determinant*

$$d_n = \begin{vmatrix} \frac{1+a_1}{a_1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1+a_2}{a_2} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1+a_3}{a_3} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{1+a_n}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Řešení.

$$d_n = \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Problém 9.9. *Nechť* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jsou matice jako na začátku předcházejícího důkazu. Připomeňme, že pro* $1 \leq i, j \leq n$ *značíme symbolem* $\mathbf{A}^{ij}$ *matici, která vznikne vynecháním* i*-tého řádku a* j*-tého sloupce matice* $\mathbf{A}$. *Ukažte, že platí*

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x \det \mathbf{A}^{ij}.$$

Cvičení 9.10. *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *spočtěte*

$$d_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Řešení. $d_1 = a_1 + b_1$, $d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_1 - a_2 b_2$ a $d_n = 0$, pro $n > 2$.

Příklad 9.6. *Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1. \end{array}$$

Řešení. Položme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve spočítáme determinant matice $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20.$$

Připomeňme, že pro $i = 1,\ 2,\ 3$ značíme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne nahrazením i-tého řádku v matici $\mathbf{A}$ vektorem $\mathbf{b}$. Podle Cramerova pravidla je

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{4},$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

□

Cvičení 9.11. *Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1. \end{array}$$

Řešení. $x_1 = -1/5$, $x_2 = -4/5$, $x_3 = 2/5$.

Příklad 9.7. *Spočtěte inverzi k matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

$$\mathbf{A}^{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \mathbf{A}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \mathbf{A}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}^{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad \mathbf{A}^{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \mathbf{A}^{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\mathbf{A}^{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \qquad \mathbf{A}^{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \mathbf{A}^{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

odkud

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Příklad 9.8. *Spočtěte inverzi k regulární matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Řešení. Protože je matice $\mathbf{A}$ regulární, je $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$. Adjungovanou matici k matici $\mathbf{A}$ určíme okamžitě:

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$\square$

Cvičení 9.12. *Spočtěte pomocí determinantů inverzní matice k maticím*

$$\mathbf{Ro}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Re}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Rozmyslete si, jaká zobrazení z roviny do roviny jsou danými maticemi reprezentována.

Řešení.

$$\mathbf{Ro}_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Re}_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Cvičení 9.13. *Spočtěte pomocí determinantů inverzi k regulární matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Vlastní čísla a vlastní vektory

Cvičení 10.1. *Rozhodněte, které z vektorů*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a pro ty, které jsou vlastními vektory určete příslušná vlastní čísla.

Řešení. Vlastní vektory jsou $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ s příslušnými vlastními čísly po řadě 1, 3, 3.

Příklad 10.1. *Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve určíme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$. Ten je roven determinantu matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3$:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} (-3-\lambda) & -4 & -4 \\ -3 & (-1-\lambda) & -3 \\ 5 & 4 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & -4 \\ 0 & (2-\lambda) & -3 \\ (\lambda-1) & (\lambda-2) & (6-\lambda) \end{vmatrix}$$

Od prvního a druhého sloupce jsme odečetli třetí sloupec. Nyní můžeme z prvního, resp. druhého sloupce vytknout $\lambda-1$, resp. $\lambda-2$. Dostaneme

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}.$$

Dále rozvineme výsledný determinant podle prvního sloupce. Tak dostaneme, že

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3| &= -(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2+3) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou -1, 1 a 2. Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ určíme postupně jako řešení homogenních soustav rovnic určených maticemi $\mathbf{A}+\mathbf{I}_3$, $\mathbf{A}-\mathbf{I}_3$ a $\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3$. Dostanem tak, že vlastnímu číslu -1 odpovídá podprostor vlatních vektorů generovaný vektorem $(2, 1, -2)^T$, vlastnímu číslu 1 odpovídá podprostor vlatních vektorů generovaný vektorem $(1, 0, -1)^T$ a vlastnímu číslu 2 odpovídá podprostor vlatních vektorů generovaný vektorem $(0, 1, -1)^T$. □

Příklad 10.2. *Rozhodněte, zda je matice* $\mathbf{A}$ *z předchozího příkladu diagonalizovatelná. Pokud ano, najděte diagonální matici* $\mathbf{D}$ *a regulární matici* $\mathbf{C}$ *tak, že*

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{10.1}$$

Řešení. Charakteristický plynom matice $\mathbf{A}$ má jen jednoduché kořeny a proto je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná. Diagonální matice $\mathbf{D}$ vyhovující rovnici (10.1) musí mít stejná vlasní čísla jako matice $\mathbf{A}$. Tato vlastní čísla tedy musí ležet na diagonále matice $\mathbf{D}$. Sloupce matice $\mathbf{C}$ jsou tvořeny vlastnímí vektory matice $\mathbf{A}$ v tom pořadí v jakém jsou na diagonále matice $\mathbf{D}$ příslušná vlastní čísla. Tedy, například pro

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sami spočtěte matici $\mathbf{C}^{-1}$ a ověřte, že skutečně platí rovnost (10.1). □

Příklad 10.3. *Rozhodněte, zda je matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

diagonalizovatelná.

Řešení. Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ a určíme její vlastní čísla.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 8-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} &= (8-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)\left(36 - 12\lambda + \lambda^2 - 4\right) = (8-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 32) \\ &= (8-\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

a tedy $\sigma(\mathbf{A}) = \{8,\ 4\}$. Algebraická násobnost vlastního čísla 4 je rovna jedné, zatímco algebraická násobnost vlastního čísla 8 je rovna dvěma.

Matice $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy když je dimenze podprostoru všech řešení homogennní soustavy rovnice s levou stranou určenou maticí $\mathbf{A} - 8\mathbf{I}$ rovna dvěma, tj. když $r(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}) = 1$. Platí

$$\mathbf{A} - 8\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme ověřili, že $r(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}) = 2$ a proto je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná. □

Cvičení 10.2. *Je dána matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete její vlastní čísla a příslušné podprostory vlastních vektorů.

Řešení. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou 1, 2 a 3 a odpovídající podprostory vlastních vektorů jsou po řadě $\mathcal{L}\{(1,2,1)^T\}$, $\mathcal{L}\{(1,1,0)^T\}$ a $\mathcal{L}\{(1,2,2)^T\}$.

Cvičení 10.3. *Je dána matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určete její vlastní čísla a rozhodněte, zda je tato matice diagonalizovatelná.

Řešení. Matice je diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou -2, 4 a 8.

Cvičení 10.4. *Najděte matici* $\mathbf{C}$ *takovou, že je matice* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$*, kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

diagonální.

Řešení. Například (řešení není určeno jednoznačně)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 10.4. *Rozhodněte, zda je matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

podobná, při vhodné volbě báze, matici lineárního operátoru F na prostoru $\mathbf{R}^3$ určeného předpisy $F((1,0,0)^T) = (-5,3,3)$, $F((0,1,0)^T) = (-6,4,6)^T$ a $F((0,0,1)^T) = (0,0,-2)^T$.

Řešení. Matice $\mathbf{B}$ operátoru F vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbf{R}^3$ je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ je maticí lineárního operátoru F při vhodné volbě báze prostoru $\mathbf{R}^3$ právě když je podobná matici $\mathbf{B}$, tj. právě když existuje regulární matice $\mathbf{C}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}. \tag{10.2}$$

Nutnou podmínkou je, aby měly matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejné charakteristické polynomy.

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -3 & -2 \\ -1 & (-2-\lambda) & 1 \\ 5 & -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -3 & 1-\lambda \\ -1 & (-2-\lambda) & 0 \\ 5 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -3 & 1 \\ -1 & (-2-\lambda) & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} (-2-\lambda) & 0 & 0 \\ -1 & (-2-\lambda) & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)(\lambda+2)^2$ a

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} (-5-\lambda) & -6 & 0 \\ 3 & (4-\lambda) & 0 \\ 3 & 6 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\begin{vmatrix} (-5-\lambda) & -6 \\ 3 & (4-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)\Big((\lambda-4)(\lambda+5)+18\Big) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Algebraická násobnost vlastního čísla -2 je rovna v obou případech dvěma. Hodnost matice

$$\mathbf{A}+2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna dvěma, zatímco hodnost matice

$$\mathbf{B}+2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna jedné. Odtud plyne, že matice $\mathbf{B}$ je diagonalizovatelná zatímco matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná není. Proto neexistuje matice $\mathbf{C}$ taková, že je podmínka (10.2) splněna a matice **A** nemůže být maticí lineárního F vzhledem k žádné bázi. $\square$

Cvičení 10.5. *Určete vlastní čísla matic*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 8 \\ 4 & 14 & 8 \\ -8 & -32 & -18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a rozhodněte, které z nich jsou diagonalizovatelné.

Řešení. $\sigma(\mathbf{A}) = \{-3, 4\}$, $\sigma(\mathbf{B}) = \{-2, 2\}$, $\sigma(\mathbf{C}) = \{3\}$, $\sigma(\mathbf{D}) = \{3\}$. Diagonalizovatelné jsou matice **A**, **B**.

Cvičení 10.6. *Nechť* **A**, **B**, **C** *a* **D** *jsou matice z předchozího příkladu. Určete matice* **P**, **Q** *takové, že matice* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ *a* $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BQ}$ *jsou diagonální. Rozhodněte, zda jsou matice* **C** *a* **D** *podobné.*

Řešení. Například

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice **C** a **D** nejsou podobné.

Příklad 10.5. *Buď*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

reálná matice. Určete

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{A}^n.$$

Řešení. Určíme charakteristický polynom, vlastní čísla a podprostory příslušných vlastních vektorů matice **A**. Charakteristický polynom matice **A** je $(1-\lambda)(\lambda-2)^2$. Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 je generován vektorem$(1, 0, -1)^T$, podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2 je generován vektory $(2, 1, -2)^T$ a $(0, -1, 1)^T$. Pro matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

platí, že $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$ a tedy $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}$. Odtud dostaneme, že pro každé přirozené číslo n je

$$\mathbf{A}^n = \left(\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\right)^n = \mathbf{C}\left(\mathbf{D}^n\right)\mathbf{C}^{-1},$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{A}^n = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{C}\left(\mathbf{D}^n\right)\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\left(\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{D}^n\right)\mathbf{C}^{-1}. \tag{10.3}$$

Protože je matice $\mathbf{D}$ diagonální, platí

$$\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

a proto

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme matici

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a dosadíme do vztahu (10.3). Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathbf{A}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Cvičení 10.7. *Určete*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n,$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 10.6. *Nechť* $a+b \neq 0$ *a*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix}.$$

Určete $e^{\mathbf{A}}$.

Poznámka. Matici $e^{\mathbf{A}}$ můžeme definovat například pomocí Taylorova rozvoje funkce e^x, tedy

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}.$$

Výsledná matice odpovídá tomuto součtu.

Řešení. Charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda(\lambda+(a+b))$ a tedy $\sigma(\mathbf{A}) = \{0, -(a+b)\}$. Příslušné vlastní vektory jsou $(b,a)^T$ a $(1,-1)^T$. Položíme-li

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(a+b) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix},$$

je $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}$ a tedy

(10.4)

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1})^n}{n!} = \mathbf{C}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!}\right)\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}e^{\mathbf{D}}\mathbf{C}^{-1}.$$

Porotože je matice $\mathbf{D}$ diagonální, platí, že

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-(a+b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(a+b)} \end{pmatrix}.$$

Ještě spočítáme

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix}$$

a dosadíme do vztahu (10.4). Dostaneme

$$e^{\mathbf{A}} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(a+b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a+b} \left(e^{-(a+b)} \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ a & a \end{pmatrix} \right).$$

□

Cvičení 10.8. *Určete* $\sin \mathbf{A}$, *je-li*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\sin \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problém 10.9. *Dokažte, že pro každou čtvercovou reálnou matici* $\mathbf{A}$ *platí*

$$\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\operatorname{tr} \mathbf{A}}.$$

Příklad 10.7. *Vyřešte rekurentní rovnici*

$$d_{n+2} = a d_{n+1} + b d_n \tag{9.2}$$

studovanou v Kapitole 9.

Řešení. Rekurentnímu vztahu (9.2) přiřadíme maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ d_n \end{pmatrix},$$

ze které odvodíme, že

$$\begin{pmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}. \tag{10.5}$$

Charakteristický polynom $\chi_{\mathbf{A}}$ matice $\mathbf{A}$ je roven

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - b.$$

Rozebereme dva případy:

1) Polynom $\chi_{\mathbf{A}}$ má dva různé kořeny α, β. Potom je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná, vlastní vektory příslušné vlastním číslům α, resp. β matice $\mathbf{A}$ jsou $(\alpha, 1)^T$, resp. $(\beta, 1)^T$ a platí

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C},$$

kde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n = \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{C}^{-1} &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & -\alpha\beta(\alpha^n - \beta^n) \\ \alpha^n + \beta^n & -\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (10.5) dostaneme, že

$$d_{n+2} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} d_2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(\alpha^n + \beta^n) d_1,$$

což po úpravě dává

$$d_{n+2} = \alpha^{n+1} \underbrace{\frac{d_2 - \beta d_1}{\alpha - \beta}}_{c_1} - \beta^{n+1} \underbrace{\frac{d_2 - \alpha d_1}{\alpha - \beta}}_{c_2},$$

tj. vzorec (9.3).

2) Polynom $\chi_{\mathbf{A}}$ má jeden dvojnásobný kořen α. V tomto případě není matice $\mathbf{A}$ diagonalizovetelná a vlastní vektor $\mathbf{v}$ příslušný k vlastnímu číslu α je $(\alpha, 1)^T$. Řešením rovnice

$$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{v}$$

dostaneme $\mathbf{x} = (\alpha + 1, 1)^T$. Položme

$$\mathbf{C} = (\mathbf{v} \mid \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}. \tag{10.6}$$

Snadno spočítáme, že

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 + \alpha \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do vztahu (10.6) dostaneme, že

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 + \alpha \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\alpha^n & -n\alpha^{n+1} \\ n\alpha^{n-1} & -(n-1)\alpha^n \end{pmatrix},$$

odkud, vzhledem k (10.5),

$$d_{n+2} = (n+1)\alpha^n d_2 - n\alpha^{n+1} d_1,$$

což je vztah (9.4). □

Příklad 10.8. *Určete spektrální rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 6 \\ 9 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Využijte tohoto rozkladu k výpočtu matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Řešení. Nejprve spočítáme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$; $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2)$. Odtud je vidět, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou -1 a 2. Dosazením těchto hodnot spočteme, že $(2,-3,0)^T$ je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu 2 a $(1,-1,0)^T$, $(1,0,1)^T$ je lineárně nezávislá dvojice vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu -1 (nyní je vidět, že je matice $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná). Položme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a spočtěme, že

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hledáme matice $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ takové, že $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} = -\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j = \delta_{i,j}\mathbf{E}_i$ ($\delta_{i,j}$ je rovno 0, resp. 1 je-li $i \neq j$, resp. $i = j$). Podle Věty 10.15 jsou tyto matice určeny jednoznačně a rozborem důkazu této věty snadno zjistíme, že

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z vlastností matic $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ snadno odvodíme, že

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení 10.10. *Určete spektrální rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 10.11. *Pomocí spektrální věty vyřešte znovu Příklad 10.6.*

Cvičení 10.12. *Určete spektrální rozklad matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí tohoto rozkladu určete matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Řešení. $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, kde

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Příklad 10.9. *Pro reálnou matici*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

najděte ortogonální matici $\mathbf{C}$ *a diagonální matici* $\mathbf{D}$ *tak, že platí*

$$\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}.$$

Řešení. Nejprve spočítáme charakteristický polynom a určíme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-1)^2,$$

odkud dostáváme, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou 1 a 4. Vlastnímu číslu 4 odpovídá vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)^T$, vlastímu číslu 1 lineárně nezávislá dvojice vlastních vektorů $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)^T$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,-1)^T$. Matice $\mathbf{A}$ je symetrická a tedy normální. Podle Tvrzení 10.20 je vektor $\mathbf{v}_1$ kolmý na lineární obal vektorů $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Vektor $\mathbf{v}_1$ normalizuje (výsledek označíme $\mathbf{q}_1$) a pomocí Gramova-Schmidtova algoritmu určíme ortonormální bázi $\mathbf{q}_2$ a $\mathbf{q}_3$ prostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Dostaneme $\mathbf{q}_1 = 1/\sqrt{3}(1,1,1)^T$, $\mathbf{q}_2 = 1/\sqrt{2}(1,-1,0)^T$ a $\mathbf{q}_3 = 1/\sqrt{6}(1,1,-2)^T$. Sloupce matice $\mathbf{C}$ jsou tvořeny vektory $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ a na diagonále matice $\mathbf{D}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ (každé tolikrát, kolik je jeho násobnost) v pořadí odpovídajícím uspořádání sloupců matice $\mathbf{C}$. Tedy například

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení 10.13. *Určete diagonální matici* $\mathbf{D}$ *a ortogonální matici* $\mathbf{C}$ *tak, aby* $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$, *je-li*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Cvičení 10.14. *Určete diagonální matici* $\mathbf{D}$ *a unitární matici* $\mathbf{C}$ *tak, aby* $\mathbf{C}^*\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$, *je-li*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Cvičení 10.15. *Určete diagonální matici* $\mathbf{D}$ *a unitární matici* $\mathbf{C}$ *tak, aby* $\mathbf{C}^*\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$, *je-li*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Samoopravné kódy

Příklad 11.1. *Určete lineární kód $\mathcal{C}$ s generující maticí*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je kód $\mathcal{C}$ z předcházející úlohy systematický a najděte nějakou jeho kontrolní matici.

Řešení. Platí, že $\mathcal{C} = \mathcal{R}(\mathbf{C})$ a tedy $\mathcal{C}$ je trojdimenzionální podprostor prostoru $\mathbf{Z}_2^5$. Vynásobením matice $\mathbf{C}^T$ maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny binárními kódy čísel $0, 1, \ldots, 7$, zprava, získáme matici v jejíž sloupce budou tvořeny právě vektory kódu $\mathcal{C}$. Dostaneme tak, že

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Kód $\mathcal{C}$ je generován libovolnou maticí, jejíž řádky tvoří jeho bázi. Tedy také maticí

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

odtud vidíme, že je kód $\mathcal{C}$ systematický a podle Tvrzení 11.6 je matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kontrolní maticí tohoto kódu. □

Cvičení 11.1. *Výčtem prvků popište lineární kód $\mathcal{C}$ určený generující maticí*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda jde o systematický kód a najděte nějakou jeho kontrolní matici.

Řešení.

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jedná se o systematický kód s kontrolní maticí

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 11.2. *Rozhodněte, které z matic* $\mathbf{C}_1$*,* $\mathbf{C}_2$ *a* $\mathbf{C}_3$ *jsou generující matice lineárního kódu s kontrolní maticí* $\mathbf{D}$*, kde*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pouze matice $\mathbf{C}_2$.

Cvičení 11.3. *Rozhodněte, které dvojice matic generují stejný lineární kód.*

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice $\mathbf{C}_1$ a $\mathbf{C}_2$.

Příklad 11.2. *Určete vzdálenost $d(\mathcal{C})$ lineárního kódu $\mathcal{C}$ s generující maticí*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Kód $\mathcal{C}$ je roven řádkovému podprostoru matice $\mathbf{C}$ a tedy

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vzdálenost kódu $\mathcal{C}$ je rovna minimální výšce nenulového vektoru, který v tomto kódu leží. Tedy $d(\mathcal{C}) = 1$. □

Cvičení 11.4. *Určete vzdálenost $d(\mathcal{C})$ lineárního kódu $\mathcal{C}$ s generující maticí*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $d(\mathcal{C}) = 1$.

Příklad 11.3. *Určete vzdálenost $d(\mathcal{D})$ lineárního kódu $\mathcal{C}$ s kontrolní maticí*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle Tvrzení 11.1 je $d(\mathcal{C})$ rovna nejmenšímu počtu lineárně závislých řádků v matici $\mathbf{D}$. Snadno nahlédneme, že každá dvojice řádků matice $\mathcal{D}$ je lineárně nezávislá, ale existuje trojice řádků, například druhý, třetí a šestý, která je lineárně závislá. Proto $d(\mathcal{D}) = 3$. □

Cvičení 11.5. *Určete vzdálenost $d(\mathcal{C})$ lineárního kódu $\mathcal{C}$ s kontrolní maticí*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $d(\mathcal{C}) = 2$.

Cvičení 11.6. *Určete vzdálenost $d(\mathcal{C})$ lineárního kódu $\mathcal{C}$ s kontrolní maticí*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $d(\mathcal{C}) = 3$.

Problém 11.7. *Dokažte, že pro lineární kód $\mathcal{C}$ platí*

$$d(\mathcal{C}) = \min\{wt(\mathbf{v}) \mid 0 \neq \mathbf{v} \in \mathcal{C}\}.$$

Problém 11.8. *Jak vypadá množina všech slov, které dokáže daný lineární kód odhalit?*

12. Kvadratidké formy

Příklad 12.1. *Určete kvadratickou formu f jejíž matice je*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Podle definice matice kvadratické formy je

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + x_3^2.$$

□

Cvičení 12.1. *Určete kvadratickou formu f jejíž matice je*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

Cvičení 12.2. *Určete matici* $\mathbf{B}$ *reálné kvadratické formy*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Řešení.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 12.3. *Určete matici* $\mathbf{B}$ *kvadratické formy*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$$

nad tělesem $\mathbf{Z}_5$.

Řešení.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 12.2. *Buď*

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

kvadratická forma na prostoru $\mathcal{R}^2$. *Určete ortonormální bázi* $\mathcal{C}$ *prostoru* $\mathcal{R}^2$ *vzhledem ke které má forma* f *tvar* $f(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2$.

Řešení. Matice formy f vzhledem ke standardní bázi je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ortogonální matice $\mathbf{C}$ taková, že je matice $\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}$ diagonální bude maticí přechodu od báze $\mathcal{C}$ ke standardní bázi, tedy bázi $\mathcal{C}$ budou tvořit sloupce matice $\mathbf{C}$. Matici $\mathbf{C}$ určíme podobně jako v Příkladu 10.9. Vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ jsou 2 a 4 a příslušné vlastní vektory jsou $(1, -1)^T$, $(1, 1)^T$. Tuto dvojici ortogonalizujeme a dostaneme, že

$$\mathbf{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud $\mathcal{C} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)^T, \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)^T\}$. (Poznamnejme ještě, že vzhledem k této bázi je forma f tvaru $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2$.) □

Cvičení 12.4. *Určete ortonormální bázi* $\mathcal{C}$ *prostoru* $\mathcal{R}^2$ *vzhledem ke které má forma*

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$$

tvar $f(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2$.

Řešení. $\mathcal{C} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T\}$

Cvičení 12.5. *Určete ortonormální bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathcal{R}^2$ vzhledem ke které má forma*

$$f(x_1, x_2) = 2\sqrt{3}x_1x_2 - 2x_2^2$$

tvar $f(y_1, y_2) = ay_1^2 + by_2^2$.

Řešení. $\mathcal{C} = \{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T\}$.

Cvičení 12.6. *Nalezněte ortonormální bázi $\mathcal{C}$ prostoru $\mathcal{R}^3$ vzhledem ke které má forma*

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

tvar $f(y_1, y_2, y_3) = ay_1^2 + by_2^2 + cy_3$ *a určete koeficienty* a, b, c.

Řešení. $\mathcal{C} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T, (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^T, (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T\}$ a $a = 2$, $b = 6$ a $c = 3$.

Příklad 12.3. *Rozhodněte jaký typ křivky je dán rovnicí*

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 12.$$

Určete délky a směry hlavních poloos této křivky.

Řešení. Podle Příkladu 12.2 má forma

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

vzhledem k bázi $\mathcal{C}$ tvar

$$f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2$$

a tedy daná křivka je popsána rovnicí

$$2y_1^2 + 4y_2^2 = 12,$$

kterou upravíme do tvaru

$$\frac{y_1}{6} + \frac{y_2}{3} = 1.$$

Vidíme, že se jedná o elipsu s poloosami délek $\sqrt{6}$, resp. $\sqrt{3}$ a směrů odpovídajích vektorům báze $\mathcal{C}$, tj. $(1, -1)^T$, resp. $(1, 1)^T$. □

Cvičení 12.7. *Rozhodněte jaký typ křivky je dán rovnicí*

$$2x_1x_2 = 1.$$

Určete délky a směry hlavních poloos této křivky.

Řešení. Jedná se o hyperbolu jejíž obě hlavní poloosy mají délku 1 a jejich směry jsou $(1, 1)^T$ a $(1, -1)^T$.