2. Volná abelovská grupa

2.1 Definice. Nechť $(A_i \mid i \in I)$ je systém abelovských grup. „Vnějším“ *direktním součtem* těchto grup rozumíme grupu všech posloupností $(a_i)_{i\in I}$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in I$ a $a_i = 0$ pro skoro všechna $i \in I$ (tedy až na konečně mnoho $i \in I$). Vnější direktní součin grup A_i, $i \in I$, značíme

$$A = \bigoplus_{i\in I} A_i.$$

Nechť A je abelovská grupa a $(A_i \mid i \in I)$ je systém podgrup grupy A takový, že každý prvek $a \in A$ je možné zapsat právě jedním způsobem jako součet $a = \sum_{i\in F} a_i$, kde F je konečná podmnožina I a $a_i \in A_i$ pro každé $i \in F$. Potom řekneme, že A je *vnitřním direktním součtem* grup $(A_i \mid i \in I)$, značíme

$$A = \coprod_{i\in I} A_i.$$

Snadno ověříme, že zobrazení $\varphi : \bigoplus_{i\in I} A_i \to \coprod_{i_i n I} A_i$ definované předpisem $\varphi((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i$ je izomorfismus. Nadále nebudeme rozlišovat mezi vnějším a vnitřním direktním součtem.

2.2 Definice. Abelova grupa F se nazývá *volná*, jestliže je vnitřním direktním součtem nekonečných cyklických grup. To je tehdy, když existuje podmnožina X grupy F prvků nekonečného řádu taková, že $F = \coprod_{x\in X} \langle x\rangle$, neboli $F \simeq \bigoplus \mathbb{Z}$. Množině X říkáme *báze* F.

(Všimněme si, že pro každý prvek $u \in F$ existuje právě jedna posloupnost $(u_x)_{x\in X}$ celých čísel tak, že $u = \sum_{x\in X} u_x \cdot x$. Navíc je v této posloupnosti jen konečně mnoho nenulových prvků.)

2.3 Věta. Nechť F je volná abelovská grupa s bází X, nechť A je abelovská grupa a nechť $f : X \to A$ je libovolné zobrazení. Potom existuje právě jeden homomorfismus $\varphi : F \to A$, který rozšiřuje f, tedy $\varphi(x) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. Pro $u = \sum_{x\in X} u_x \cdot x$ $(*)$ definujme $\varphi(u) = \sum_{x\in X} u_x f(x)$. Protože každý prvek F má jednoznačné vyjádření ve tvaru $(*)$, je zobrazení φ dobře definováno. Je zřejmé, že φ je homomorfismus rozšiřující f. Jednoznačnost plyne z toho, že φ je plně určen zobrazením f na množině generátorů F. □

2.4 Důsledek. Libovolná abelovská grupa A je homomorfním obrazem volné abelovské grupy.

Důkaz. Buď F volná abelovská grupa s bází A. Identitu na A je možné právě jedním způsobem rozšířit na homomorfismus z F do A. □

2.5 Definice. Abelova grupa A je *generována* množinou X (obvykle uvažujeme $X \subseteq A$) a relacemi Δ, jestliže $A \simeq F/R$, kde F je volná abelovská grupa s bází X, Δ je množina $\mathbb{Z}$-lineárních kombinací prvků X a R je podgrupa F generovaná množinou Δ. Mluvíme též o *prezentaci* (X, Δ) grupy A. Je-li možné volit X konečnou, řekneme, že A je *konečně generována*.

2.6 Příklad. Buď $G = \mathbb{Z}_6$. Potom možné prezentace G jsou

1) $X = \{x\}$, $\Delta = \{x^6\}$,
2) $X = \{x, y\}$, $\Delta = \{x^3, y^2\}$.

(Druhá prezentace určuje grupu izomorfní $\mathbb{Z}_6$ neboť $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.)

2.7 Příklad. Ukažte, že $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $\Delta = \{x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_3, \dots, x_{n-1} - nx_n, \dots\}$ je prezentací grupy racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Návod: Definujme homomorfismus $\psi : F \to \mathbb{Q}$ předpisem $\psi(x_i) = \frac{1}{i!}$, kde F je volná grupa s bází X. Nyní stačí ukázat, ľe $\operatorname{Ker}\psi = R$, kde R je podgrupa F generovaná Δ. Na jednu stranu $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{n}{n!} = 0$, zbývá ukázat, že ze vztahu $\sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{i!} = 0$ plyne $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in \langle\Delta\rangle$. To se nahlédne postupnou eliminací x_i pomocí vztahů z Δ.

2.8 Příklad. Buď p prvočíslo. Označme $\mathbb{Z}(p^\infty)$ grupu s prezentací $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\Delta = \{px_1, x_1 - px_2, x_2 - px_3, \dots\}$ (říká se jí Prüferova grupa) a G buď grupa s prezentací $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\Delta' = \{px_1, x_1 - p^nx_n \mid n > 1\}$. Potom je řád každého prvku ze $\mathbb{Z}(p^\infty)$ i G mocninou prvočísla p a platí $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathbb{Z}(p^\infty) \neq 0, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^nG \neq 0$. Ukažte, že $\mathbb{Z}(p^\infty) \not\simeq G$.

Návod: Ukažte, že je každý faktor $\mathbb{Z}(p^\infty)$ izomorfní $\mathbb{Z}(p^\infty)$ a že $G/\langle\{x_1\}\rangle$ není izomorfní $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

2.9 Věta. Volné abelovské grupy F, G jsou izomorfní, právě když $|X| = |Y|$, kde X je volná báze F a Y volná báze G.

Důkaz. Buď nejprve $|X| = |Y|$. Potom existuje bijekce $f : X \to Y$ a tuto bijekci je možné rozšířit právě jedním způsobem na homomorfismus $\varphi : F \to G$. Podobně je možné rozšířit zobrazení f^{-1} právě jedním způsobem na homomorfismus $\psi : G \to F$. Protože $\psi \circ \varphi : F \to F$ rozšiřuje identitu na X (a takový homomorfismus je jediný), je $\psi \circ \varphi = id_F$. Obdobně je $\varphi \circ \psi = id_G$ a tedy φ je hledaný izomorfismus.

Nyní naopak předpokládejme, že jsou grupy F a G izomorfní. Buď p prvočíslo. Potom je možné chápat F/pF jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_p$. Navíc je $\{x + pF \mid x \in X\}$ báze F/pF: Z toho, že $\sum a_i(x_i + pF) = 0$ totiž plyne, že $\sum a_i x_i \in pF$ a proto $p \mid a_i$. Odtud je vidět, že se jedná o triviální kombinaci.

Protože $F \simeq G$, je také i $F/pF \simeq G/pG$ a to znamená, že tyto prostory mají stejnou dimenzi. Odtud již plyne rovnost $|X| = |Y|$. □

2.10 Tvrzení. Nechť π je projekce abelovské grupy A na abelovskou grupu B a φ je homomorfismus $F \to B$, kde F je volná abelovská grupa. Potom existuje homomorfismus $\psi : F \to A$ takový, že $\varphi = \pi \circ \psi$.

Důkaz. Buď X báze F a $g : X \to A$ zobrazení takové, že $g(x) \in \pi^{-1}(\varphi(x))$ pro každé $x \in X$. Protože F je volná grupa s bází X, existuje homomorfismus $\psi : F \to A$ rozšiřující zobrazení g. Protože se homomrfismy φ a $\pi \circ \psi$ shodují na bázi grupy F, jsou shodné. □

2.11 Důsledek. Buďte A, B abelovské grupy a nechť B/A je volná. Potom je A direktním sčítancem B, tedy $B = A \oplus C$, kde $C \simeq B/A$.

Důkaz. Aplikujeme předchozí tvrzení na přirozenou projekci $\pi : B \to B/A$, za F zvolíme B/A a za φ identitu na B/A. Existuje tedy homomorfismus $\psi : B/A \to B$ takový, že $\pi \circ \psi = id_{B/A}$. Z tohoto vztahu snadno nahlédneme, že pro $C = \operatorname{Im} \psi$ je $C \cap A = 0$ a $C \vee A = B$, tedy $B = A \oplus C$. □

2.12 Věta. Podgrupa H volné abelovské grupy F je také volná abelovská grupa.

Důkaz. Buď $X = \{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ báze F. Pro $\alpha < \kappa$ definujme $F_\alpha = \langle\{x_\beta \mid \beta \leq \alpha\}\rangle$, $F'_\alpha = \langle\{x_\beta \mid \beta < \alpha\}\rangle$. Dále nechť $H_\alpha = H \cap F_\alpha$ a $H'_\alpha = H \cap F'_\alpha$. Platí

$$H_\alpha/H'_\alpha = H_\alpha/H \cap F'_\alpha \simeq H_\alpha + F'_\alpha/F'_\alpha \leq F_\alpha/F'_\alpha \simeq \mathbb{Z},$$

použili jsme druhou větu o izomorfismu a fakt, že x_α generuje cyklickou grupu nekonečného řádu. Protože je netriviální podgrupa $\mathbb{Z}$ izomorfní $\mathbb{Z}$, vidíme, že buďto $H_\alpha/H'_\alpha = \langle\{h_\alpha\}\rangle \simeq \mathbb{Z}$, nebo $H_\alpha/H'_\alpha = \{0\}$. Označme $H^* = \langle\{h_\alpha \mid \alpha < \kappa\}\rangle$. Ukážeme, že $H^* = H$.

Pro spor předpokládejme, že $H > H^*$. Všimněme si, že $F = \cup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$. Pro každé $h \in H$ tedy existuje nejmenší $\mu(h)$, ľe $h \in F_{\mu(h)}$. Vezměme si α nejmenší takové, že existuje $h \in H \backslash H^*$, ľe $\mu(h) = \alpha$. Potom $h = m \cdot h_\alpha + h'$, kde $h' \in F'_\alpha$. Z minimality α dostáváme, že $h' \in H^*$. Zároveň však $h_\alpha \in H^*$, tedy i $h \in H^*$, což je spor. Musí proto nutně platit $H = H^*$.

Zbývá dokázat, že $\{h_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ je volná báze H. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by netriviální $\mathbb{Z}$-lineární kombinace

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} a_{\alpha_i} h_{\alpha_i} = 0.$$

Potom by ale bylo $h_\alpha \in H'_\alpha$, kde $\alpha = \max\{\alpha_i \mid i \leq n, a_{\alpha_i \neq 0}\}$, což je spor s volbou prvků h_α. □