TOPOLOGIE A TEORIE KATEGORIí
HODNOCENÍ A ZADANÍ DOMÁCÍCH ÚLOH

Jméno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**
Maximum	2	2	3	2	1	2	1	1	2	**16**
Filip Bialas	-	2	2	-	-	2	-	1	2	**9**
Vít Fojtík	2	2	3	-	-	2	1	1	-	**11**
Anna Gajdová	2	-	-	-	-	-	-	-	-	**2**
Vladimír Jonáš	-	2	3	-	-	-	-	-	-	**5**
Jan Kolář	2	2	3	-	1	2	1	1	1	**13**
Jakub Löwit	2	2	2	-	-	2	-	1	2	**11**
Matej Merčiak	2	2	2	-	1	-	1	1	2	**11**
Marián Poppr	2	1	2	1	1	1	1	1	1	**11**
Zuzana Procházková	2	2	-	2	1	.5	1	1	1	**10.5**
Jakub Prokop	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**—**
Radovan Švarc	2	2	3	2	1	-	-	1	2	**13**
Tomás Ye	2	2	3	2	-	2	1	1	-	**13**
Martin Žurav	2	2	3	2	1	2	1	1	-	**14**

1. Úlohy

Úloha 1.1. *Ukažte, že Sorgenfreyova přímka nemá spočetnou bázi.*

Úloha 1.2. *Ukažte, že uzávěrový operátor určený topologií prostoru* (X, τ) *splňuje*

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ *a* $\overline{X} = X$*;*
(2) $Y \subseteq \overline{Y}$ *pro všechny* $Y \subseteq X$*;*
(3) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ *pro všechny* $Y \subseteq X$*;*
(4) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ *pro všechny* $Y, Z \subseteq X$.

Ukažte naopak, že je-li předpisem $Y \mapsto \overline{Y}$ *dáno zobrazení* $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *splňující* $(1-4)$*, je množina*

$$\overline{\tau} := \{Y \subseteq X \mid Y = \overline{Y}\}$$

množinou všech uzavřených množin nějaké topologie na X.

2. Úlohy

Úloha 2.1. *Nechť* X *a* Y *jsou topologické prostory a nechť* $f\colon X \to Y$ *je zobrazení. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *Zobrazení* f *je spojité;*
(2) *Pro každou podmnožinu* $Y \subseteq X$ *platí, že* $f(\overline{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$.

Úloha 2.2. *Pro* T_1 *prostor* X *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *Prostor* X *je* T_4*;*
(2) *Pro každou otevřenou množinu* A *a každou uzavřenou množinu* G *takové, že* $G \subseteq A$ *existuje otevřená množina* B *taková, že*

$$G \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq A.$$

3. Úlohy

Úloha 3.1. *Nechť X a Y jsou Hausdorffovy prostory a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Předpokládejme, že prostor X je kompaktní. Potom pro každou $Y \subseteq X$ platí, že $f(\overline{Y}) = \overline{f(Y)}$.*

Úloha 3.2. *Nechť X a Y jsou Hausdorffovy prostory a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Předpokládejme, že prostor X je kompaktní. Je-li zobrazení f bijekce, potom je to homeomorfismus.*

Úloha 3.3. *Ukažte, že je každá kompaktní podmnožina Sorgenfreyovy přímky spočetná.*

4. Úlohy

Definujme podmnožinu $N \subseteq \mathbb{R}^2$ danou předpisem

$$N := \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \right\}.$$

Položme dále $L := \{\langle x, 0 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$. Na množině N definujeme topologie ν takto:

- Báze okolí bodu $\langle x, y \rangle$ takového, že $0 < y$, je dána množinami $o(\langle x, y \rangle, \varepsilon) \cap N$, $0 < \varepsilon$, jako v prostoru $\mathbb{R}^2$. Tj. otevřenými kruhy se tředem v bodě x proniknutými s N.
- Báze okolí bodu $\langle x, 0 \rangle$ sestává z otevřených kruhů v N, které se dotýkají přímky L v bodě $\langle x, 0 \rangle$, ke kterým přidáme tento bod, tj. z množin $o(\langle x, \varepsilon \rangle, \varepsilon) \cup \{\langle x, 0 \rangle\}$, $0 < \varepsilon$.

Topologický prostor (N, ν) budeme nazývat *Niemytzkého rovinou*.

Úloha 4.1. *Ukažte, že Niemytzkého rovina je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*

Úloha 4.2. *Ukažte, že Niemytzkého rovina není T_4 prostor.*

5. Úloha

Úloha 5.1. *Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Ukažte, že zobrazení f je otevřené právě když pro každou podmnožinu $Z \subseteq Y$ a každou uzavřebou podmnožinu $G \subseteq X$ takovou, že $f^{-1}(Z) \subseteq G$, existuje uzavřená $H \subseteq Y$ taková, že $Z \subseteq H$ a $f^{-1}(H) \subseteq G$.*

6. Úlohy

Úloha 6.1. *Ukažte, že kartézská mocnina $2^{\mathbb{N}}$ dvouprvkového Hausdorffova prostoru 2 je separabilní.*

Úloha 6.2. *Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Buď X topologický prostor s hustou podmnožinou H, Y T_1-prostor a $f, g\colon X \to Y$ dvojice spojitých zobrazení. Jestliže $f \restriction H = g \restriction H$, potom platí $f = g$.*

7. Úloha

Úloha 7.1. *Buď A otevřená podmnožina kompaktního prostoru Y. Ukažte, že jsou-li $\{G_i \mid i \in I\}$ uzavřené podmnožiny prostrou Y takové, že*

$$\bigcap_{i \in I} G_i \subseteq A,$$

potom existuje konečná podmnožina $J \subseteq I$ *taková, že*

$$\bigcap_{j \in J} G_j \subseteq A,$$

8. Úloha

Úloha 8.1. *Buď* H *hustá podmnožina toplogického prostoru* X*. Ukažte, že pro každou otevřenou podmnožinu* A *prostoru* X *platí, že*

$$\overline{A} = \overline{A \cap D}.$$

9. Úlohy

Úloha 9.1. *Buď* $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *zapomínající funktor. Ukažte, že pro každou množinu* X *existuje univerzální morfismus z* X *do* U*.*

Úloha 9.2. *Buď* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *funktor a* b *objekt kategorie* $\mathbf{B}$*. Ukažte, že dvojice* $\langle a, u \rangle$ *je univerzálním morfismem z objektu* b *do funktoru* F *právě když je univerzálním objektem funktoru* $\hom_{\mathbf{B}}(b, F(-))$*.*