Dvanáct přednášek z topologie a teorie kategorií

Pavel Růžička

Texty k přednášce konané

v letním semestru 2017/2018 na MFF UK

Památce Věry Trnkové

Obsah

Úvod

Tyto texty odpovídají látce probrané během přednášky *Topologie a teorie kategorií* konané v letním semestru 2018 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Každá z dvanácti kapitol odpovídá jedné z přednášek. První část textu zahrnuje přednášky z obecné topologie vykládané převážně podle monografie Ryszarda Engelkinga [**2**]. Rozsahem odpovídá prvním dvěma a části třetí kapitoly z této knihy. Druhá část přednášky byla inspirována prvními pěti kapitolami z Mac Laneovy monografie [**3**]. Vyložíme v ní základní pojmy teorie kategorií.

V první části nejprve definujeme základní pojmy obecné topologického prostoru včetně pojmu sítě, její limity a jejího hromadného bodu. Zavedeme oddělovací axiomy $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ a T_4 a ukážeme, že tvoří lineární hierarchii. To zahrnuje důkaz Urysohnova lemmatu, že každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$. Dále definujeme kompaktní prostory a ukážeme, že každý kompaktní prostor je normální (tj., T_4-prostor). Ukážeme Tichonovovu větu, že součin kompaktních prostorů je opět kompaktní. Pomocí této věty charakterizujeme Tichonovovy prostory (tj., $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory) jako podprostory kompaktních prostorů a lokálně kompaktní prostory jako otevřené podprostory kompaktních prostorů. Nakonec prozkoumáme jejich kompaktifikace.

Druhou část věnovanou teorii kategorií opět začneme definicemi základních pojmů. Definujeme tak kategorie, funktory (kovariantní a kontravariantní) a přirozené transformace. Definujeme pojmy univerzálního morfismu z objektu do funktoru a univerzálního objektu funktoru a pojmy k nim duální. Limitu (duálně kolimitu) diagramu definujeme jako univerzální morfismus z daného diagramu (duálně do daného diagramu). Ukážeme, že kategorie je úplná právě když má součiny a ekvalizéry. Nakonec definujeme adjunkci a prostudujeme její vlastnosti. Mimo jiné popíšeme souvislost mezi adjunkcemi a univerzálními morfismy.

Část 1

Topologie

KAPITOLA 1

Topologické prostory a konvergence

ABSTRAKT. *Definujeme pojem topologického prostoru, bázi topologie, uzavřené množiny a uzávěrový operátor na množině, vnitřek a hranici množiny. Dále popíšeme konvergenci v topologických prostorech. Konkrétně definujeme pojem sítě, limity a hromadného bodu sítě. Ukážeme, že hromadný bod sítě je limitou nějakého jejího zjemnění.*

1.1. Topologie, otevřené, uzavřené množiny

DEFINICE. *Topologický prostor* je dvojice (X, τ), kde X je množina a τ je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky a libovolná sjednocení a obsahující X, tj., takový, že

(o1) $\emptyset, X \in \tau$,
(o2) $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$,
(o3) $\mathcal{Y} \subseteq \tau \implies \bigcup \mathcal{Y} \in \tau$.

Indukcí podle n snadno ukážeme, že

(o2') $A_1, \ldots, A_n \in \tau \implies A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.

Prvky množiny X budeme nazývat *body* a podmnožiny z τ *otevřené* množiny.

PŘÍKLAD 1.1.1. *Je-li $\tau = \mathcal{P}(X)$, množina všech podmnožin X, nazýváme $(X, \mathcal{P}(X))$ diskrétní topologický prostor. Naopak topologický prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nazýváme indiskrétní.*

DEFINICE. *Bází* topologického prostoru (X, τ) rozumíme podmnožinu $\mathcal{B} \subseteq \tau$ takovou, že
$$A = \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq A\},$$
pro každé $A \in \tau$.

LEMMA 1.1.1. *Buď $\mathcal{B}$ báze topologického prostoru (X, τ). Potom platí, že*

(b1) *pro každé $x \in X$ existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B$;*
(b2) *pro každé $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, pro každé $x \in B_1 \cap B_2$ existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

DŮKAZ. Obě vlastnosti plynou ihned z definice báze. □

LEMMA 1.1.2. *Buď X množina a $\mathcal{B}$ systém neprázdných podmnožin X splňující podmínky (b1) a (b2) předchozího lemmatu. Potom je*

$$\tau := \left\{A \mid \exists \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B} \colon A = \bigcup \mathcal{Y}\right\} \qquad (1)$$

topologií na X a $\mathcal{B}$ je bází topologického prostoru (X,τ).

Důkaz. Vzhledem k (b1), je $X = \bigcup \mathcal{B}$ a tedy $X \in \tau$. Nechť $A_1, A_2 \in \tau$. Podle (1) existují $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathcal{B}$ takové, že $A_i = \bigcup \mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2$. Odtud je vidět, že

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 = \bigcup \{B_1 \cap B_2 \mid B_1 \in \mathcal{Y}_1 \text{ a } B_2 \in \mathcal{Y}_2\}\,.$$

Z podmínky (b2) plyne, že pro každou dvojici množin $B_1 \in \mathcal{Y}_1, B_2 \in \mathcal{Y}_2$ existuje $\mathcal{Y}_{B_1,B_2} \subseteq \mathcal{B}$ takové, že $B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{Y}_{B_1,B_2}$. Odtud dostaneme, že

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup \left\{ \bigcup \mathcal{Y}_{B_1,B_2} \mid B_1 \in \mathcal{Y}_1 \text{ a } B_2 \in \mathcal{Y}_2 \right\} \in \tau.$$

Je zřejmé z definice, že τ je uzavřeno na libovolná sjednocení. Proto je τ topologií na X.

Z definice (1) je vidět, že $\mathcal{B}$ je bází topologického prostoru (X,τ). □

Topologii τ definovanou předpisem (1) nazveme *topologií určenou bází* $\mathcal{B}$.

Příklad 1.1.2. *Metrikou na množině X rozumíme zobrazení $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ splňující*

(m1) $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$,
(m2) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$,
(m3) $\delta(x,z) \le \delta(x,y) + \delta(y,z)$,

pro všechna $x,y,z \in X$. Dvojici (X,δ) množiny X spolu s metrikou δ na této množině budeme nazývat metrickým prostorem.

Pro každé x a každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ položíme

$$o(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid \delta(x,y) < \varepsilon\}\,.$$

Definujme

$$\mathcal{B}_\delta := \{o(x,q) \mid x \in X \text{ a } 0 < q \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{B}_\delta$ a tedy $\mathcal{B}_\delta$ splňuje podmínku (b1). Ukážeme, že množina $\mathcal{B}_\delta$ splňuje podmínku (b2). Nechť $x_1, x_2 \in X$, q_1, q_2 jsou kladná racionální čísla a $y \in o(x_1,q_1) \cap o(x_2,q_2)$. Potom $\delta(y,x_i) < q_i$, $i = 1,2$. Zvolme racionální číslo q takové, že $0 < q < \min\{q_i - \delta(y,x_i) \mid i = 1,2\}$. Pro každé $z \in o(y,q)$ a každé $i \in \{1,2\}$ plyne z (m3), že $\delta(z,x_i) \le \delta(y,x_i) + \delta(y,z) < \delta(y,x_i) + q < \delta(y,x_i) + q_i - \delta(y,x_i) = q_i$. Odtud dostaneme, že $\delta(y,q) \subseteq \delta(x_1,q_1) \cap \delta(x_2,q_2)$.

Topologii určenou bází $\mathcal{B}_\delta$ budeme značit τ_δ a nazývat topologií metriky δ.

Příklad 1.1.3. *Na množině $\mathbb{R}$ je daná metrika δ předpisem*

$$\delta(a,b) := |a - b|,$$

pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$. Topologii τ_δ této metriky nazveme topologií reálné přímky. Všimněme si, že reálná přímka má kromě báze $\mathcal{B}_\delta$ i spočetnou bázi

$$\{(p,q) \mid p < q,\ p,q \in \mathbb{Q}\}$$

složenou z otevřených intervalů s racionálními mezemi.

PŘÍKLAD 1.1.4. *Položme*

$$\mathcal{S} := \{ \langle a,b) \mid a < b,\ a,b \in \mathbb{R} \} .$$

Snadno nahlédneme, že množina $\mathcal{S}$ splňuje podmínky (b1) a (b2) a je tedy bází topologie, kterou označíme σ. Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel spolu s topologií σ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Nechť $a < b$ v $\mathbb{R}$. Všimněme si, že pokud $\langle a,b) = \bigcup \mathcal{Y}$ pro nějakou $\mathcal{Y} \subseteq \sigma$, potom existuje $A \in \mathcal{Y}$ taková, že a je nejmenší prvek A. Odtud je vidět, že je-li $\mathcal{B}$ báze topologie σ, existuje pro každé reálné a množina $A \in \mathcal{B}$ taková, že a je její nejmenší prvek. Proto má každá báze topologie σ mohutnost alespoň kontinua.

Řekneme, že podmnožina G topologického prostoru X je *uzavřená* je-li její doplněk $X \setminus G$ množina otevřená. Symbolem $\overline{\tau}$ označíme množinu všech uzavřených podmnožin topologického prostoru (X, τ).

Z vlastností (o1-o3) topologie τ snadno dovodíme, že množina $\overline{\tau}$ má tyto vlastnosti:

(u1) $\emptyset, X \in \overline{\tau}$;
(u2) $G, H \in \overline{\tau} \implies G \cup H \in \overline{\tau}$;
(u3) $\mathcal{Y} \subseteq \overline{\tau} \implies \bigcap \mathcal{Y} \in \overline{\tau}$.

Indukcí anebo přímo z (o2') dále ukážeme, že platí

(u2') $G_1, \ldots, G_n \in \overline{\tau} \implies G_1 \cup \cdots \cup G_n \in \overline{\tau}$.

Naopak je-li $\overline{\tau}$ množina podmnožin X s vlastnostmi (u1-u3) je

$$\tau := \{X \setminus G \mid G \in \overline{\tau}\} \tag{2}$$

topologií na X a $\overline{\tau}$ je množina všech uzavřených podmnožin této topologie.

Podmínka (u3) znamená, že je množina $\mathcal{Y}$ uzavřená na libovolné průniky. To znamená, že pro každé $Y \subseteq X$ je množina

$$\overline{Y} := \bigcap \{G \in \overline{\tau} \mid Y \subseteq G\}$$

uzavřená a je to zřejmě nejmenší uzavřená množina obsahující množinu Y. Množinu $\overline{Y}$ nazveme *uzávěrem* množiny Y.

LEMMA 1.1.3. *Buď (X, τ) topologický prostor. Potom pro každé $Y, Z \subseteq X$ platí, že*

(c1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(c2) $Y \subseteq \overline{Y}$,
(c3) $Y \subseteq Z \implies \overline{Y} \subseteq \overline{Z}$,
(c4) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$,
(c5) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$.

DŮKAZ. Podmínky (c1-c4) plynou ihned z definice (2). Z monotónie uzávěrového operátoru plyne, že $\overline{Y} \cup \overline{Z} \subseteq \overline{Y \cup Z}$. Opačná inkluze $\overline{Y \cup Z} \subseteq \overline{Y} \cup \overline{Z}$ je zřejmá z toho, že je množina $\overline{Y} \cup \overline{Z}$ uzavřená. Vidíme tak, že je splněna i podmínka (c5). $\square$

Cvičení 1.1.1. *Buď $Y \mapsto \overline{Y}$ zobrazení splňující podmínky (c1-c5). Ukažte, že množina*

$$\{Y \subseteq X \mid Y = \overline{Y}\}$$

splňuje podmínky (u1-u3) a je tedy množinou všech uzavřených množin topologie na X.

Buď (X, τ) topologický prostor. *Okolím* bodu $x \in X$ rozumíme množinu $U \subseteq X$ takovou, že existuje otevřená množina A splňující $x \in A \subseteq U$. Okolí bodu x je *otevřené* (resp. *uzavřené*) je-li současně otevřenou (resp. uzavřenou) množinou.

Je zřejmé, že množina $A \subseteq X$ je otevřená právě když s každým svým prvkem obsahuje také nějaké jeho okolí. V souvislosti s uzávěrovým operátorem máme následující lemma:

Lemma 1.1.4. *Buď (X, τ) topologický prostor, $x \in X$ a $Y \subseteq X$. Potom $x \in \overline{Y}$ právě když $U \cap Y \neq \emptyset$ pro každé (otevřené) okolí bodu x.*

Důkaz. Pokud $x \notin \overline{Y}$, je $x \in X \setminus \overline{Y}$ a proto je $X \setminus \overline{Y}$ otevřené okolí x disjunktní s množinou Y. Naopak je-li $U \cap Y \neq \emptyset$ pro každé otevřené okolí U bodu x, je $x \in G$ pro každou uzavřenou množinu obsahující Y. V opačném případě by totiž bylo $X \setminus G$ otevřené okolí bodu x disjunktní s Y. To znamená, že $x \in \bigcap\{G \text{ uzavřená} \mid Y \subseteq G\} = \overline{Y}$. □

Buď (X, τ) topologický prostor. *Vnitřkem* množiny $Y \subseteq X$ rozumíme množinu

$$\check{Y} := \bigcup\{A \in \tau \mid A \subseteq Y\}.$$

Vnitřek množiny Y je tedy největší otevřenou množinou obsaženou v Y. Snadno nahlédneme, že

$$\check{Y} = X \setminus \overline{X \setminus Y}.$$

Hranicí množiny $Y \subseteq X$ rozumějme množinu $\partial Y := \overline{Y} \setminus \check{Y} = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$. Z Lemmatu 1.1.4 plyne, že

Lemma 1.1.5. *Buď (X, τ) topologický prostor, $x \in X$ a $Y \subseteq X$. Potom $x \in \partial Y$ právě když $U \cap Y \neq \emptyset$ a současně $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ pro každé (otevřené) okolí bodu x.*

Podmnožina Y topologického prostoru X je *obojetná* právě když je současně otevřená a uzavřená.

Příklad 1.1.5. *Jedinými obojetnými podmnožinami reálné přímky $\mathbb{R}$ jsou $\mathbb{R}$ a $\emptyset$ zatímco každá z množin $\langle a, b)$ báze Sorgenfreyovy přímky je její obojetnou podmnožinou.*

1.2. Konvergence v topologických prostorech

Částečně uspořádaná množina Σ je *usměrněná*, pokud pro každé $\sigma', \sigma'' \in \Sigma$ existuje $\sigma \in \Sigma$ takové, že $\sigma' \leq \sigma$ a současně $\sigma'' \leq \sigma$.

Síť v topologickém prostoru (X,τ) je soubor $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ bodů z X, indexovaný usměrněnou množinou Σ. Síť je zřejmým zobecněním pojmu posloupnosti, která je příkladem sítě indexované uspořádanou (a usměrněnou) množinou přirozených čísel. Je-li $\{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \subseteq Y$, kde Y je podmnožina X, budeme říkat, že S je *síť v* Y.

Řekneme, že bod $x \in X$ je *limitou* sítě $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$, pokud pro každé jeho okolí U existuje $\sigma \in \Sigma$ takové, že $X_{\sigma'} \in U$ pro všechna $\sigma' \geq \sigma$. V případě, že je bod x limitou sítě Σ, říkáme také, že síť S *konverguje* k x.

Příklad 1.2.1. *Uvažme množinu X, která je disjunktním sjednocením množiny $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ a dvouprvkové množiny $\{a,b\}$. Na množině X definujme topologii τ určenou bází sestávající z množin $\{n\}$, $\{n,n+1,\dots,a\}$ a $\{n,n+1,\dots,b\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $\sigma_n = n$. Posloupnost $\langle \sigma_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ má v topologickém prostoru (X,τ) dvě různé limity a a b.*

Množinu všech limit sítě $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ v daném topologickém prostoru budeme značit $\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$ nebo také $\lim S$. V případě, že má síť S právě jednu limitu x budeme psát $x = \lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$ nebo také $x = \lim S$.

Lemma 1.2.1. *Buď (X,τ) topologický prostor, $Y \subseteq X$ a $x \in X$. Potom $x \in \overline{Y}$ právě když existuje síť v Y, která konverguje k x.*

Důkaz. ($\Leftarrow$) Existuje-li síť $\langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ v Y, která konverguje k x, je $\emptyset \neq U \cap \{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \subseteq U \cap Y$ pro každé okolí U bodu x. Z Lemmatu 1.1.4 plyne, že $x \in \overline{Y}$.

($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $x \in \overline{Y}$. Buď Σ množina všech okolí bodu x uspořádaná opačnou inkluzí. Všimněme si, že množina Σ je uzavřená na konečné průniky a tedy je v daném uspořádání usměrněná. Pro každé okolí U bodu x zvolme $x_U \in U \cap Y$. Takový bod existuje neboť $x \in \overline{Y}$. Snadno nahlédneme, že $\langle x_U \mid U \in \Sigma\rangle$ je síť v Y konvergující k x. □

Důsledek 1.2.2. *Podmnožina G daného topologického prostoru je uzavřená právě když s každou sítí, která v ní leží, obsahuje také všechny její limity.*

Definice. Řekneme, že síť $S' = \langle y_\rho \mid \rho \in \Sigma'\rangle$ je *zjemněním* sítě $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ jestliže existuje zobrazení $f\colon \Sigma' \to \Sigma$ takové, že

(1) pro každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\rho \in \Sigma'$ takové, že $f(\rho') \geq \sigma$ pro všechna $\rho' \geq \rho$,
(2) $x_{f(\rho)} = y_\rho$ pro všechna $\rho \in \Sigma'$.

Všimněme si že podmínka (1) z předchozí definice je splněna pokud je $f\colon \Sigma' \to \Sigma$ monotónní[1] zobrazení takové, že

(1') pro každé $\sigma \in \Sigma$ existuje $\rho \in \Sigma'$ takové, že $\sigma \leq f(\rho)$.

Definice. Bod x je *hromadným bodem* sítě $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ v daném topologickém prostoru, pokud pro každé okolí U bodu x a každé $\sigma \in \Sigma$

[1] zachovávající uspořádání

existuje $\sigma_U \geq \sigma$ v Σ takové, že $x_{\sigma_U} \in U$. Množinu všech hromadných bodů sítě S označíme[2] $\operatorname{clp}_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$, nebo také $\operatorname{clp} S$.

Z usměrněnosti množiny Σ je ihned vidět, že každá limita sítě S je současně jejím hromadným bodem. Naopak, položíme-li $x_n := (-1)^n$, má posloupnost $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ v $\mathbb{R}$ dva hromadné body -1 a 1, ale nemá žádnou limitu.

Tvrzení 1.2.3. *Buď $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ síť v topologickém prostoru (X, τ). Potom platí:*

(a) *Je-li $x \in X$ hromadným bodem nějakého zjemnění sítě S, potom je hromadným bodem S.*
(b) *Je-li $x \in X$ limitou sítě S, potom je limitou každého jejího zjemnění.*
(c) *Bod $x \in X$ je hromadným bodem sítě S právě když je limitou nějakého jejího zjemnění.*

Důkaz. Postupně ukážeme jednotlivá tvrzení:

(a) Předpokládejme, že bod $x \in X$ je hromadným bodem zjemnění $S' = \langle y_\rho \mid \rho \in \Sigma'\rangle$ sítě S, daného zobrazením $f \colon \Sigma' \to \Sigma$ (takovým, že jsou splněny podmínky (1) a (2) z definice zjemnění). Buď U okolí bodu x a $\sigma \in \Sigma$. Podle podmínky (1) existuje $\rho \in \Sigma'$ takové, že $f(\rho') \geq \sigma$ pro všechna $\rho' \geq \rho$. Protože je x hromadným bodem sítě S', existuje $\rho_U \geq \rho$ tak, že $y_{\rho_U} \in U$. Z nerovnosti $\rho_U \geq \rho$ plyne, že $f(\rho_U) \geq \sigma$ a z podmínky (2) dostaneme $x_{f(\rho_U)} = y_{\rho_U} \in U$. Ukázali jsme, že x je hromadným bodem sítě S.
(b) Předpokládejme, že $x \in \lim S$ a buď $S' = \langle y_\rho \mid \rho \in \Sigma'\rangle$ zjemnění sítě S, dané zobrazením $f \colon \Sigma' \to \Sigma$. Buď U libovolné okolí bodu x. Protože x je limitou sítě S, existuje $\sigma_U \in \Sigma$ takové, že $x_\sigma \in U$ pro každé $\sigma \geq \sigma_U$. Protože je síť T zjemněním sítě S, existuje $\rho_U \in \Sigma'$ takové, že $f(\rho) \geq \sigma_U$ pro všechna $\rho \geq \rho_U$. Z podmínky (2) pak plyne, že $y_\rho = x_{f(\rho)} \in U$, pro všechna $\rho \geq \rho_U$. Ukázali jsme tak, že $x \in \lim S'$.
(c) Je-li bod x limitou nějakého zjemnění sítě S, potom je hromadným bodem S podle bodu (a). Zbývá tedy ukázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že x je hromadným bodem sítě S. Uvažme množinu

$$\Sigma' := \{\langle \sigma, U\rangle \mid U \text{ je okolí bodu } x \text{ a } x_\sigma \in U\}.$$

Na množině Σ' definujme uspořádání předpisem

$$\langle \sigma, U\rangle \leq \left\langle \sigma', U'\right\rangle, \text{ jestliže } \sigma \leq \sigma' \text{ a zároveň } U' \subseteq U.$$

Nechť $\langle \sigma_1, U_1\rangle, \langle \sigma_2, U_2\rangle \in \Sigma'$. Protože je uspořádaná množina Σ usměrněná, existuje $\sigma' \in \Sigma$ tak, že $\sigma_1, \sigma_2 \leq \sigma'$. Protože je x hromadným bodem sítě S a $U_1 \cap U_2$ jeho okolí, existuje $\sigma \geq \sigma'$ v množině Σ tak, že $x_\sigma \in U_1 \cap U_2$. Potom je $\langle \sigma, U_1 \cap U_2\rangle \in \Sigma'$ a z

[2] z anglického výrazu pro hromadný bod: *cluster point*

definice uspořádání na množině Σ' je vidět, že $\langle \sigma_1, U_1 \rangle, \langle \sigma_2, U_2 \rangle \leq \langle \sigma, U_1 \cap U_2 \rangle$. Proto je množina Σ' usměrněná.

Definujme zobrazení $f\colon \Sigma' \to \Sigma$ předpisem $\langle \sigma, U \rangle \mapsto \sigma$ a položme $y_{\langle \sigma, U \rangle} = x_\sigma$ pro každé $\langle \sigma, U \rangle \in \Sigma'$. Ukážeme, že síť $S' = \left\langle y_{\langle \sigma, U \rangle} \mid \langle \sigma, U \rangle \in \Sigma' \right\rangle$ je zjemněním sítě S. Z definic je ihned vidět, že $y_{\sigma, U} = x_{f(\langle \sigma, U \rangle)}$, pro každé $\langle \sigma, U \rangle \in \Sigma'$. Všimněme si navíc, že zobrazení f je monotónní a proto stačí ověřit podmínku (1'). To je snadné neboť pro každé $\sigma \in \Sigma$ je $\langle \sigma, X \rangle \in \Sigma'$ a $f(\langle \sigma, X \rangle) = \sigma$.

Nakonec ukážeme, že bod x je limitou sítě S'. Buď U okolí bodu x. Protože je x hromadným bodem sítě S, existuje $\sigma \in \Sigma$ tak, že $x_\sigma \in U$. Potom $\langle \sigma, U \rangle \in \Sigma'$ a je-li $\langle \sigma', U' \rangle \geq \langle \sigma, U \rangle$, je $y_{\langle \sigma', U' \rangle} = x_{\sigma'} \in U' \subseteq U$.

$\square$

Z Důsledku 1.2.2 a Tvrzení 1.2.3 odvodíme, že

Důsledek 1.2.4. *Podmnožina G daného topologického prostoru je uzavřená právě když s každou sítí, která v ní leží, obsahuje také všechny její hromadné body.*

KAPITOLA 2

Spojitá zobrazení, oddělovací axiomy

Abstrakt. *Definujeme spojitá zobrazení a prozkoumáme jejich různé charakterizace. Například ukážeme, že zobrazení je spojité právě když zachovává limity všech sítí. Dále definujeme oddělovací axiomy $T_1 - T_4$. Charakterizujeme Hausdorffovy topologické prostory jako prostory v nichž má každá síť nejvýše jednu limitu. Nakonec ukážeme Urysohnovo lemma, že každý normání topologický prostor je Tichonovův.*

2.1. Spojitá zobrazení

Nechť X, Y jsou množiny a $f\colon X \to Y$ zobrazení. *Vzorem* podmnožiny $Z \subseteq Y$ (vzhledem k danému zobrazení f) budeme rozumět podmnožinu

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$$

množiny X.

Definice. Nechť (X, τ), (Y, υ) jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *spojité* pokud $f^{-1}(A) \in \tau$ pro každé $A \in \upsilon$, tj., pokud je vzorem každé otevřené množiny v Y otevřená množina v X.

Následující tvrzení je triviální ale důležité.

Tvrzení 2.1.1. *Složením spojitých zobrazení dostaneme opět spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť jsou $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ spojitá zobrazení. Pro každou otevřenou $A \subseteq Z$ platí, že $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Množina $g^{-1}(A)$ je otevřená, neboť je g spojité. Ze spojitosti f pak dostaneme otevřenost $f^{-1}(g^{-1}(A))$. □

Lemma 2.1.2. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když je vzorem každé uzavřené množiny v Y uzavřená množina X.*

Důkaz. Pro každou $Z \subseteq Y$ je X disjunktním sjednocením vzorů $f^{-1}(Z)$ a $f^{-1}(Y \setminus Z)$ a tedy

$$f^{-1}(Z) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus Z).$$

Odtud snadno odvodíme dokazované tvrzení. □

Lemma 2.1.3. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když pro každé $x \in X$ a každé okolí U bodu $f(x)$ v Y je $f^{-1}(U)$ okolím bodu x.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité. Zvolme bod $x \in X$ a okolí U bodu $f(x)$ libovolně. Potom je $f(x) \in \breve{U}$ a tedy $x \in f^{-1}(\breve{U})$. Protože je zobrazení f spojité, je množina $f^{-1}(\breve{U})$ otevřená. Odtud plyne, že $f^{-1}(U)$ je okolím bodu x. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že vzory okolí obrazů bodů z X jsou jejich okolími. Buď A libovolná otevřená podmnožina prostoru Y. Pro každé $x \in f^{-1}(A)$ je A okolím bodu $f(x)$ a z našeho předpokladu plyne, že $f^{-1}(A)$ je okolím x. Množina $f^{-1}(A)$ je tedy okolím každého svého bodu. To znamená, že je otevřená. □

Definice. Buď (X, τ) topologický prostor. Množina $\mathcal{S} \subseteq \tau$ je *sub-bází* prostoru X pokud pro každý bod $x \in X$ a každé jeho okolí U existuje konečná $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ taková, že $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$.

Z definice je vidět, že $\mathcal{S} \subseteq \tau$ je sub-bází prostoru (X, τ) právě když je množina

$$\left\{ \bigcap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ je konečná podmnožina } \mathcal{S} \right\}$$

bází. Proto je každá báze prostoru X také jeho sub-bází.

Lemma 2.1.4. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ je ekvivalentní:*

(1) *Zobrazení f je spojité;*
(2) *Existuje báze $\mathcal{B}$ prostoru Y taková, že množina $f^{-1}(B)$ je otevřená pro každé $B \in \mathcal{B}$.*
(3) *Existuje sub-báze $\mathcal{S}$ prostoru Y taková, že množina $f^{-1}(S)$ je otevřená pro každé $S \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Implikace ($1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$) jsou zřejmé z definic. Předpokládejme, že platí (3). Buď $x \in X$ a U okolí bodu $f(x)$ v Y. Z definice sub-báze plyne, že existují $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ takové, že $f(x) \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq U$. Potom platí, že

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) \subseteq f^{-1}(U).$$

Z podmínky (3) plyne, že je množina

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(S_i)$$

otevřená. Proto je $f^{-1}(U)$ je okolím bodu x. Vzhledem k Lemmatu 2.1.3 je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité. □

Definice. Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *spojité v bodě* $x \in X$ jestliže pro každé okolí U bodu $f(x)$ je $f^{-1}(U)$ okolím x.

Z Lemmatu 2.1.3 plyne, že

Tvrzení 2.1.5. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když je spojité v každém bodě prostoru X.*

Cvičení 2.1.1. *Ukažte, že zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité v bodě $x \in \mathbb{R}$ (podle výše uvedené definice) právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Zobecněte toto tvrzení pro zobrazení metrických prostorů.*

Podívejme se ještě na souvislost spojitosti a konvergence.

Lemma 2.1.6. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když*

$$f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)} \tag{3}$$

pro každou podmnožinu Z prostoru X.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité a nechť $Z \subseteq X$. Z Lemmatu 2.1.2 plyne, že je množina $f^{-1}(\overline{f(Z)})$ uzavřená. Tato množina zřejmě obsahuje Z a proto platí, že $\overline{Z} \subseteq f^{-1}(\overline{f(Z)})$. Odtud plyne dokazovaná inkluze $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že platí inkluze (3) pro každou $Z \subseteq X$. Buď G libovolná uzavřená podmnožina množiny Y. Inkluze (3) pro množinu $Z = f^{-1}(G)$ implikuje, že

$$f(\overline{f^{-1}(G)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(G))} = \overline{G} = G,$$

odkud dostaneme, že $\overline{f^{-1}(G)} \subseteq f^{-1}(G)$. Proto je množina $f^{-1}(G)$ uzavřená. Z Lemmatu 2.1.2 plyne, že je zobrazení f spojité. $\square$

Tvrzení 2.1.7. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité právě když pro každou síť $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\rangle$ v prostoru X platí, že*

$$f(\lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma) \subseteq \lim_{\sigma\in\Sigma} f(x_\sigma). \tag{4}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité a buď $x \in \lim_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma$. Buď dále U libovolné okolí bodu $f(x)$. Podle Lemmatu 2.1.3 je $f^{-1}(U)$ okolím bodu x a z definice limity sítě plyne, že existuje $\sigma_U \in \Sigma$ tak, že $\sigma \in f^{-1}(U)$ pro všechna $\sigma \geq \sigma_U$. Odtud dostaneme, že $f(x_\sigma) \in U$ pro všechna $\sigma \geq \sigma_U$. Proto platí, že $f(x) \in \lim_{\sigma\in\Sigma} f(x_\sigma)$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že pro každou síť S v X platí (4). Vzhledem k Lemmatu 1.2.1 pak $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$ pro každou $Z \subseteq X$. Z Lemmatu 2.1.6 plyne, že je zobrazení f spojité. $\square$

2.2. Axiomy oddělitelnosti

Definice. Řekneme, že topologický prostor X je T_0, pokud pro každou dvojici bodů prostoru X existuje otevřená podmnožina obsahující právě jeden z nich.

Definice. Řekneme, že topologický prostor X je T_1, pokud pro každou dvojici bodů $x, y \in X$ existuje otevřená podmnožina A prostoru X taková, že $\{x, y\} \cap X = \{x\}$.

Z definice je vidět, že topologický prostor X je T_1 právě když pro každou dvojici x, y jeho různých bodů existuje okolí bodu x, které neobsahuje y.

TVRZENÍ 2.2.1. *Topologický prostor X je T_1 právě když jsou všechny jeho jednoprvkové podmnožiny uzavřené.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že prostor X je T_1 a buď $y \in X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{y\}$ existuje okolí bodu x obsažené v množině $X \setminus \{y\}$. Odtud plyne, že je množina $X \setminus \{y\}$ otevřená. Proto je množina $\{y\}$ uzavřená. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že jsou všechny jednoprvkové podmnožiny prostoru X uzavřené. Jsou-li x, y dva různé body v X je potom $X \setminus \{y\}$ otevřená množina obsahující x a neobsahující y. $\square$

PŘÍKLAD 2.2.1. *Uvažme dvouprvkovou množinu $X = \{x, y\}$ s topologií $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Topologický prostor (X, τ) je T_0, ale není T_1.*

DEFINICE. Topologický prostor X je *T_2* (nebo také *Hausdorffův*), pokud pro každou dvojici různých bodů $x, y \in X$ existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $x \in A$ a $y \in B$.

PŘÍKLAD 2.2.2. *Uvažme nekonečnou množinu X s topologií*

$$\tau := \{X \setminus F \mid F \text{ je konečná podmnožina } X\} \cup \{\emptyset\}.$$

Protože jsou množiny $X \setminus \{x\}$, $x \in X$, otevřené, topologický prostor (X, τ) je T_1. Protože je množina X nekonečná, je průnik dvou neprázdných otevřených podmnožin X neprázdný. Odtud plyne, že prostor (X, τ) není T_2.

Hausdorffovy prostory lze charakterizovat pomocí konvergence.

LEMMA 2.2.2. *Topologický prostor X je T_2 právě když má každá síť v X nejvýše jednu limitu.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Nejprve předpokládejme, že je prostor X Hausdorffův. Pro spor navíc předpokládejme, že existuje síť $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \rangle$ a dva body $x \neq y$ v X takové, že $x, y \in \lim S$. Protože je prostor X Hausdorffův, existují disjunktní otevřené A, B takové, že $x \in A$ a $y \in B$. Protože síť S konverguje k bodu x, existuje $\sigma_A \in \Sigma$ taková, že $x_\sigma \in A$ pro všechny $\sigma \geq \sigma_A$. Podobně protože S konverguje k y, existuje $\sigma_B \in \Sigma$ taková, že $x_\sigma \in B$ pro všechny $\sigma \geq \sigma_B$. Protože je množina Σ usměrněná, existuje $\sigma \geq \sigma_A, \sigma_B$. Z předešlého plyne, že $x_\sigma \in A \cap B = \emptyset$, což je spor.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že v prostor X není Hausdorffův. Potom v X existují dva různé body x, y takové, že $U \cap V \neq \emptyset$, kdykoli je U okolí bodu x a V okolí bodu y. Uvažme množinu

$$\Sigma := \{U \cap V \mid U \text{ je okolí bodu } x \text{ a } V \text{ je okolí bodu } y\}$$

a na ní definujme uspořádání opačnou inkluzí. Všimněme si, že Σ je uzavřena na konečné průniky. Odtud je vidět, že je usměrněná. Pro každé $W \in \Sigma$ zvolme $x_W \in W$. Tak dostaneme síť $S := \langle x_W \mid W \in \Sigma \rangle$. Buď U libovolné okolí bodu x a $W \in \Sigma$. Potom je $U \cap W \in \Sigma$, a $x_{W'} \in W' \subseteq U$ pro každé $W' \subseteq U \cap W$. Odtud plyne, že $x \in \lim S$. Podobně ukážeme, že $y \in \lim S$ a tedy síť S má alespoň dvě různé limity. $\square$

TVRZENÍ 2.2.3. *Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f, g \colon X \to Y$ je dvojice spojitých zobrazení. Je-li prostor Y Hausdorffův, potom je množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ uzavřená.*

DŮKAZ. Buď $y \in X$ bod takový, že $f(y) \neq g(y)$. Protože je prostor Y Hausdorffův, existují disjunktní okolí U a V bodů $f(y)$ a $g(y)$. Protože jsou obě zobrazení f a g spojitá, jsou vzory $f^{-1}(U)$, $g^{-1}(V)$ okolími bodu y. Jejich průnik $W := f^{-1}(U) \cap g^{/}-1(V)$ je také okolím bodu y. Pro každé $w \in W$ je $f(w) \in U$ a $g(w) \in V$ a tedy $f(w) \neq g(w)$. Odtud plyne, že je množina $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ otevřená. Proto je množina $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ uzavřená. □

DEFINICE. Topologický prostor X je *T_3* (též *regulární*), jestliže je T_1 a pro každé $x \in X$ a každou uzavřenou $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $x \in A$ a $G \subseteq B$.

Protože v T_1 prostoru tvoří každý bod uzavřenou podmnožinu a každý T_3 prostor je z definice T_1 je každý T_3 prostor T_2.

DEFINICE. Buď (X, τ) topologický prostor a $x \in X$. Množina $\mathcal{B}(x)$ je *bází okolí* bodu x pokud sestává z okolí bodu x a pro každé okolí V bodu x existuje množina $U \in \mathcal{B}(x)$ taková, že $U \subseteq V$.

PŘÍKLAD 2.2.3. *Uvažme množinu*

$$G := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

a reálnou přímku s obvyklou topologií rozšířenou o bázi okolí bodu 0 *sestávající z množin*

$$\{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus G \mid 0 < \varepsilon\}.$$

V takto definované topologii, označme ji τ, je množina G uzavřená. Nechť A je otevřená množina obsahující 0*. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus G \subseteq A$. Buď $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$. Buď B otevřená množina obsahující G. Potom B obsahuje nějaké okolí bodu $1/n$ a tedy $B \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \neq \emptyset$. Odtud dostaneme, že $A \cap B \neq \emptyset$. Ukázali jsme, že bod* 0 *a uzavřenou množinu G nelze oddělit disjunktními otevřenými množiny a proto není zkonstruovaný topologický prostor T_3. Protože topologie τ obsahuje všechny otevřené intervaly, je Hausdorffova.*

LEMMA 2.2.4. *Buď (X, τ) topologický prostor, který je T_1. Potom je tento prostor T_3 právě když pro každé $x \in X$ a každou otevřenou množinu A obsahující bod x, existuje okolí U tohoto bodu takové, že $\overline{U} \subseteq A$.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že X je T_3 prostor. Buď x bod v X a $A \in \tau$ taková, že $x \in A$. Položme $G = X \setminus A$. Množina G je uzavřená a neobsahuje bod x. Z předpokladu, že je prostor X regulární plyne, že existují disjunktní otevřené množiny U, B takové, že $x \in U$ a $G \subseteq B$. Z $U \cap B = \emptyset$ a z $G \subseteq B$ dostaneme, že $\overline{U} \subseteq X \setminus B \subseteq X \setminus G = A$. Proto je U hledané okolí bodu x jehož uzávěr je obsažen v B. ($\Leftarrow$) Buď x bod a G

uzavřená podmnožina taková, že $x \notin G$. Všimněme si, že $X \setminus G$ je otevřená množina obsahující X. Podle předpokladu existuje okolí U bodu x takové, že $\overline{U} \subseteq X \setminus G$. Položme $A = \breve{U}$ a $B = X \setminus \overline{U}$. Z konstrukce snadno nahlédneme, že A, B jsou disjunktní otevřené množiny, $x \in A$ a $G \subseteq B$. □

Důsledek 2.2.5. *Topologický prostor, který je T_1 je T_3 právě když má každý jeho bod bázi z uzavřených okolí.*

Definice. Buď Y topologický prostor. Topologický prostor (X, τ) je *podprostorem* prostoru Y pokud $X \subseteq Y$ a

$$\tau := \{X \cap A \mid A \text{ je otevřená množina v } Y\}\,.$$

Symbolem $\mathcal{I}$ označme podprostor $\langle 0, 1\rangle$ reálně přímky.

Definice. Topologický prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (nebo-li *Tichonovův*), jestliže je T_1 a pro každé $x \in X$ a každou uzavřenou množinu $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ existuje spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(x) = 0$ a $f(G) \subseteq \{1\}$.

Všimněme si, že pokud je topologický prostor X Tichonovův, je nutně T_3. Je-li totiž G jeho uzavřená podmnožina a x bod, který v ní neleží, existuje podle definice spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(x) = 0$ a $f(G) \subseteq \{1\}$. Potom jsou $A := f^{-1}(\langle 0, 1/3))$ a $B := f^{-1}((2/3, 1\rangle)$ disjunktní otevřené podmnožiny X takové, že $x \in A$ a $G \subseteq B$.

Definice. Topologický prostor X je T_4 (též *normální*), jestliže je T_1 a pro každou dvojici G, H disjunktních uzavřených množin existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $G \subseteq A$ a $H \subseteq B$.

Lemma 2.2.6. *Buď (X, τ) topologický prostor, který je T_1. Potom je tento prostor T_4 právě když pro každou uzavřenou množinu G a každou otevřenou množinu B takovou, že $G \subseteq B$, existuje otevřená množina A splňující $G \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq B$.*

Důkaz. Obdobný důkazu Lemmatu 2.2.4. □

Lemma 2.2.7 (Urysohnovo lemma). *Je-li topologický prostor X normální a jsou-li G, H disjunktní uzavřené podmnožiny X, potom existuje spojité zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ takové, že $f(G) \subseteq \{0\}$ a $f(H) \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná. Proto lze uspořádat množinu $\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \le q \le 1\}$ do nekonečné posloupnosti q_0, q_1, $q_2, \ldots$ indexované přirozenými čísly. Předpokládejme navíc, že $q_0 = 0$ a $q_1 = 1$. Protože jsou uzavřené množiny G, H disjunktní, existuje podle Lemmatu 2.2.6 otevřená množina U_0 taková, že $G \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq X \setminus H$. Položme $U_1 = X$.

Induktivně budeme dále konstruovat otevřené množiny $U_{q_i} \subseteq X \setminus G$, $i = 2, 3, \ldots$ tak, že

$$\overline{U_p} \subseteq U_q, \tag{5}$$

pro všechna racionální čísla $0 \le p < q < 1$.

Buď n přirozené číslo ($1 \leq n$) a předpokládejme, že jsme již sestrojili posloupnost otevřených množin $U_{q_0}, \ldots, U_{q_n}$, která splňuje podmínku (5). Pro $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ položme $j \prec_n k$ pokud $q_j < q_k$ a v intervalu (q_j, q_k) neleží žádné z racionálních čísel q_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Racionální číslo q_{n+1} padne právě do jednoho z intervalů (q_j, q_k), $j \prec_n k$. Nechť je to interval (q_l, q_r). Z předpokladu (5), že $\overline{U_{q_l}} \subseteq U_{q_r}$ a z Lemmatu 2.2.6 plyne, že existuje otevřená množina $U_{q_{n+1}}$ splňující

$$\overline{U_{q_l}} \subseteq U_{q_{n+1}} \subseteq \overline{U}_{q_{n+1}} \subseteq U_{q_r} \cap (X \setminus G).$$

Tak získáme další otevřenou množinu $U_{q_{n+1}}$ v konstruované posloupnosti.

Definujme zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ předpisem

$$f(x) := \inf \{q \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} \mid x \in U_q\}.$$

Protože je $G \subseteq U_0$, je $f(x) = 0$ pro všechna $x \in G$. Protože $U_1 = X$ a $U_q \subseteq X \setminus G$ pro všechna $q < 1$, je $f(x) = 1$ pro všechna $x \in G$.

Zbývá ukázat, že je zobrazení f spojité. Všimněme si, že interval $\mathcal{I}$ má sub-bází sestávající z polouzavřených intervalů $\langle 0, a)$, $0 < a \leq 1$ a $(b, 1\rangle$, $0 \leq b < 1$. Ukážeme, že jejich vzory jsou otevřené. Ve následujících výrazech značí q racionální číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Nechť $0 < a \leq 1$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle 0, a)) &= \{x \in X \mid f(x) < a\} \\ &= \{x \in X \mid \exists\, q < a, : x \in U_q\} = \bigcup_{q<a} U_q, \end{aligned}$$

je sjednocením otevřených množin a tedy množina otevřená.

Nechť $0 \leq b < 1$. Buď $x \in X$ a předpokládejme, že $f(x) > b$. Potom podle definice existuje racionální $p > b$ takové, že $x \notin U_p$. Pro libovolné racionální číslo q takové, že $b < q < p$ pak vzhledem k (5) platí, že $x \notin \overline{U_q}$. Odtud dostaneme, že

$$\begin{aligned} f^{-1}((b, 1\rangle) &= \{x \in X \mid b < f(x)\} \\ &= \left\{x \in X \mid \exists\, q > b, : x \notin \overline{U_q}\right\} = \bigcup_{q>b} (X \setminus \overline{U_q}), \end{aligned}$$

je opět sjednocením otevřených množin a tedy množina otevřená. Z Lemmatu 2.1.4 plyne, že je zobrazení f spojité. □

Důsledek 2.2.8. *Každý normální prostor je Tichonovův.*

KAPITOLA 3

Kompaktní prostory

ABSTRAKT. *Kompaktní prostor je Hausdorffův prostor takový, že z každého jeho otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Prostory s touto vlastností, které nejsou nutně Hausdorffovy nazýváme kvazikompaktní. Ukážeme, že Hausdorffův prostor je kompaktní právě když má každý systém jeho uzavřených podmnožin s konečnou průnikovou vlastností neprázdný průnik. Dále ukážeme, že kompaktnost Hausdorffova prostoru je ekvivalentní tomu, že každá síť v tomto prostoru má alespoň jeden hromadný bod. Nakonec ukážeme, že každý kompaktní prostor je normální, a že uzavřené podmnožiny kompaktního prostoru jsou právě jeho kompaktní podmnožiny.*

3.1. Kompaktnost

Buď (X, τ) topologický prostor a $Y \subseteq X$. Řekneme, že $\mathcal{A} \subseteq \tau$ je *otevřené pokrytí* množiny Y, je-li $Y \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

DEFINICE. Topologický prostor X je *kompaktní*, je-li Hausdorffův a pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{A}$ prostoru X existuje konečná $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že $X = \bigcup \mathcal{B}$, tj., z každého otevřeného pokrytí prostoru X lze vybrat konečné podpokrytí.

V definici je dáno, že kompaktní prostor je Hausdorffův. Prostory které nejsou Hausdorffovy a z každého jejich otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí, se nazývají *kvazi-kompaktní*.

Buď $\mathcal{G}$ systém podmnožin množiny X. Řekneme, že $\mathcal{G}$ má *konečnou průnikovou vlastnost* pokud je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ pro každou konečnou neprázdnou $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

TVRZENÍ 3.1.1. *Topologický prostor X je kvazikompaktní právě když má každá neprázdná množina $\mathcal{G}$ uzavřených podmnožin X s konečnou průnikovou vlastností neprázdný průnik.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že X je kvazikompaktní topologický prostor a nechť $\mathcal{G}$ je neprázdná množina uzavřených podmnožin X s konečnou průnikovou vlastností. Pro spor předpokládejme, že $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$. Položme $\mathcal{A} := \{X \setminus G \mid G \in \mathcal{G}\}$. Z předpokladu $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$ plyne, že je $\mathcal{A}$ otevřeným pokrytím prostoru X. Protože je tento prostor kvazikompaktní, existuje konečná podmnožina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že $X = \bigcup \mathcal{B}$. Potom je $\{X \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$

konečná podmnožina $\mathcal{G}$ a z $X = \bigcup \mathcal{B}$ plyne, že

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \emptyset,$$

což je ve sporu s konečnou průnikovou vlastností množiny $\mathcal{G}$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme nyní, že každá má každá neprázdná množina uzavřených podmnožin prostoru X s konečnou průnikovou vlastností neprázdný průnik. Buď $\mathcal{A}$ otevřené pokrytí množiny X. Potom je množina $\mathcal{G} := \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}$ neprázdnou množinou uzavřených podmnožin X. Z rovnosti $X = \bigcup \mathcal{A}$ plyne, že $\bigcap \mathcal{G} = \emptyset$. Z předpokladu plyne, že množina $\mathcal{G}$ nemá konečnou průnikovou vlastnost a proto existuje neprázdná konečná $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ jejíž průnik je konečný. Potom je $\mathcal{B} := \{X \setminus G \mid G \in \mathcal{F}\}$ konečná podmnožina $\mathcal{A}$ a z $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ plyne, že $\bigcup \mathcal{B} = X$. $\square$

Důsledek 3.1.2. *Hausdorffův topologický prostor X je kompaktní právě když má každá neprázdná množina $\mathcal{G}$ uzavřených podmnožin X s konečnou průnikovou vlastností neprázdný průnik.*

(Kvazi)kompaktnost prostoru lze charakterizovat také pomocí konvergence.

Lemma 3.1.3. *Buď X topologický prostor a $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \rangle$ síť v X. Pro každé $\sigma \in \Sigma$ položme*

$$G_\sigma := \overline{\{x_{\sigma'} \mid \sigma < \sigma' \in \Sigma\}} \tag{6}$$

a definujme $\mathcal{G} := \{G_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$. Potom je $\bigcap \mathcal{G}$ množinou všech hromadných bodů sítě S.

Důkaz. Buď x libovolný hromadný bod sítě S. Buď dále $\sigma \in \Sigma$ a U libovolné okolí bodu x. Podle definice existuje $\sigma' > \sigma$ tak, že $x_{\sigma'} \in U$ a tedy

$$U \cap \left\{x_{\sigma'} \mid \sigma < \sigma' \in \Sigma\right\} \neq \emptyset. \tag{7}$$

Odtud plyne, že $x \in \overline{\{x_{\sigma'} \mid \sigma < \sigma' \in \Sigma\}} = G_\sigma$. Proto $x \in \bigcap \mathcal{G}$.

Nechť $x \in \bigcap \mathcal{G}$. Buď dále $\sigma \in \Sigma$ a U libovolné okolí bodu x. Potom platí, že $x \in G_\sigma$ a proto platí (7), což znamená, že existuje $\sigma' > \sigma$ tak, že $x_{\sigma'} \in U$. Odtud je vidět, že x je hromadným bodem sítě S. $\square$

Tvrzení 3.1.4. *Topologický prostor je kvazikompaktní právě když má každá síť v X hromadný bod.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je topologický prostor X kvazikompaktní. Buď $S = \langle x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma \rangle$ libovolná síť v X. Pro každé $\sigma \in \Sigma$ definujme množinu G_σ předpisem (6) a položme $\mathcal{G} := \{G_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ jako v Lemmatu 3.1.3. Z toho, že je uspořádaná množina Σ usměrněná, snadno nahlédneme, že $\mathcal{G}$ má konečnou průnikovou vlastnost. Podle předpokladu je prostor X kvazikompaktní, a proto je $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Vzhledem k Lemmatu 3.1.3 má síť S alespoň jeden hromadný bod.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že má každá síť v prostoru X hromadný bod. Buď $\mathcal{G}$ množina uzavřených podmnožin prostoru X s konečnou průnikovou vlastností. Buď Σ množina všech neprázdných konečných podmnožin $\mathcal{G}$ uspořádaná inkluzí. Je zřejmé, že je množina Σ usměrněná. Pro každé $\mathcal{F} \in \Sigma$ zvolme $x_{\mathcal{F}} \in \bigcap \mathcal{F}$. To lze neboť z toho, že $\mathcal{G}$ má konečnou průnikovou vlastnost plyne, že je průnik $\bigcap \mathcal{F}$ neprázdný. Podle předpokladu má síť $S = \langle x_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \Sigma \rangle$ hromadný bod. Označme x jeden takový. Buď $G \in \mathcal{G}$ a U libovolné okolí bodu x. Potom existuje konečná $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ taková, že $G \in \mathcal{F}$ a $x_{\mathcal{F}} \in U$. Odtud je vidět, že také $x_{\mathcal{F}} \in G$. Proto je $U \cap G \neq \emptyset$. To platí pro každé okolí bodu x, odkud dostaneme, že $x \in \overline{G} = G$ (neboť G je uzavřená). Ukázali jsme, že $x \in \bigcap \mathcal{G}$. □

Důsledek 3.1.5. *Hausdorffův topologický prostor je kompaktní právě když má každá síť v X hromadný bod.*

3.2. Normalita kompaktních prostorů

O všech topologických prostorech, které se vyskytnou v této části budeme předpokládat, že jsou Hausdorffovy.

Řekneme, že podmnožina K topologického prostoru (X, τ) je *kompaktní*, je-li z každého otevřeného pokrytí $\mathcal{A}$ této množiny možné vybrat konečnou podmnožinu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tak, že $K \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Lemma 3.2.1. *Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru X je kompaktní.*

Důkaz. Buď G uzavřená podmnožina X a $\mathcal{A}$ otevřené pokrytí G. Potom je $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{X \setminus G\}$ otevřené pokrytí X a protože je prostor X kompaktní, existuje konečná $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ taková, že $X = \bigcup \mathcal{B}'$. Odtud ihned nahlédneme, že $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \setminus \{X \setminus G\} \subseteq \mathcal{A}$ je konečná a $G \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. □

Lemma 3.2.2. *Buď X regulární (tj., T_3) topologický prostor, G jeho uzavřená a K jeho kompaktní podmnožina. Jsou-li množiny G a K disjunktní, existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $G \subseteq A$ a $K \subseteq B$.*

Důkaz. Protože je prostor X regulární, existují pro každý bod $x \in K$ disjunktní otevřené množiny A_x a B_x takové, že $G \subseteq A_x$ a $x \in B_x$. Množiny B_x, $x \in K$, tvoří otevřené pokrytí K. Protože je K kompaktní podmnožina X, existuje konečná $I \subseteq K$ taková, že $K \subseteq \bigcup_{x \in I} B_x$. Položme $A := \bigcap_{x \in I} A_x$ a $B := \bigcup_{x \in I} B_x$. Protože je množina I konečná, jsou obě množiny A, B otevřené. Množinu I jsme volili tak, že $K \subseteq A$. Protože $G \subseteq B_x$ pro všechna $x \in I$, je $G \subseteq B$. Z distributivity průniku a sjednocení dostaneme, že

$$\begin{aligned} A \cap B = \Big(\bigcap_{x \in I} A_x\Big) \cap \Big(\bigcup_{x \in I} B_x\Big) &= \bigcup_{x \in I} \Big(\Big(\bigcap_{x \in I} A_x\Big) \cap B_x\Big) \\ &\subseteq \bigcup_{x \in I} (A_x \cap B_x) = \emptyset. \end{aligned}$$

Proto jsou množiny A a B disjunktní. □

Lemma 3.2.3. *Pro každou dvojici K, L disjunktních kompaktních podmnožin topologického prostoru X existují disjunktní otevřené množiny A, B takové, že $K \subseteq A$ a $L \subseteq B$.*

Důkaz. Prostor X je dle předpokladu v úvodu podkapitoly Hausdorffův a proto pro každou dvojici bodů $x \in K$ a $y \in L$ existují disjunktní otevřené množiny $A_{x,y}$ a $B_{x,y}$ takové, že $x \in A_{x,y}$ a $y \in B_{x,y}$.

Fixujme $x \in K$. Množiny $B_{x,y}$, $y \in L$, tvoří otevřené pokrytí množiny L a protože je tato množina kompaktní, existuje konečná $J_x \subseteq L$ tak, že $L \subseteq \bigcup_{y \in J_x} B_{x,y}$. Položme $A_x := \bigcap_{y \in J_x} A_{x,y}$ a $B_x := \bigcup_{y \in J_x} B_{x,y}$. Protože je množina J_x konečná, jsou obě množiny A_x a B_x otevřené a z toho, že $x \in A_{x,y}$ pro všechna $y \in L$ plyne, že $x \in A_x$. Z definice je patrné, že $L \subseteq B_x$. Podobně jako v předchozím důkazu dostaneme z distributivity průniku a sjednocení dostaneme, že

$$\begin{aligned} A_x \cap B_x &= \Big(\bigcap_{y \in J_x} A_{x,y} \Big) \cap \Big(\bigcup_{z \in J_x} B_{x,z} \Big) = \bigcup_{z \in J_x} \Big(\Big(\bigcap_{y \in J_x} A_{x,y} \Big) \cap B_{x,z} \Big) \\ &\subseteq \bigcup_{z \in I_x} (A_{x,z} \cap B_{x,z}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Množiny A_x, $x \in K$, tvoří otevřené pokrytí K a protože je množina K kompaktní, existuje konečná $I \subseteq K$ tak, že $K \subseteq \bigcup_{x \in I} A_x$. Položíme $A := \bigcup_{x \in I} A_x$ a $B := \bigcup_{x \in I} B_x$. Z konečnosti množiny I plyne, že jsou obě množiny A a B otevřené. Protože $L \subseteq B_x$ pro všechna $x \in K$, je $L \subseteq B$. Z distributivity průniku s jednocení ukážeme obdobně jako výše, že jsou množiny A, B disjunktní. □

Podle Lemmatu 3.2.1 je každá uzavřená podmnožina kompaktního prostoru kompaktní. Z právě dokázaného Lemmatu 3.2.3 tak dostaneme, že

Věta 3.2.4. *Každý kompaktní topologický prostor je normální.*

Dalším důsledkem Lemmatu 3.2.3 je, že

Lemma 3.2.5. *Každá kompaktní podmnožina topologického prostoru X je v něm uzavřená.*

Důkaz. Je-li K kompaktní podmnožina prostoru X a x bod v $X \setminus K$, potom podle Lemmatu 3.2.3 existují otevřené disjunktní A, B takové, že $K \subseteq A$ a $x \in B$. Jednoprvková množina $\{x\}$ je totiž zřejmě kompaktní. Proto pro každý bod x, který neleží v K existuje jeho okolí disjunktní s K. Odtud plyne, že je množina K uzavřená. □

KAPITOLA 4

Součin topologických prostorů a Tichonovova věta

Abstrakt. *Ukážeme, že topologický prostor (respektive Hausdorffův topologický postor) je kvazikompaktní (respektive kompaktní) právě když z každého pokrytí tohoto prostoru množinami nějaké sub-báze lze vybrat konečné podpokrytí. Dále popíšeme topologii definovanou zobrazeními z dané množiny do topologických prostorů. Je-to nejhrubší topologie na této množině taková, že jsou všechna uvažovaná zobrazení spojitá. Speciálním případem takové topologie je součinová topologie, která je definovaná projekcemi na jednotlivé souřadnice. Rozmyslíme si, že konstrukce součinu zachovává oddělovací axiomy. Nakonec ukážeme Tichonovovu větu, že součin (kvazi)kompaktních topologických prostorů je (kvazi)kompaktní.*

4.1. (Kvazi)kompaktnost a sub-báze

Buď $(Q, \leq)$ uspořádaná množina. *Řetězcem* v Q budeme rozumět lineárně uspořádanou podmnožinu Q.

Níže použijeme *Zornovo lemma* v následujícím tvaru:

Zornovo lemma. *Buď $\mathcal{Q}$ neprázdná množina podmnožin množiny P uspořádaná inkluzí taková, že pro každý neprázdný řetězec $\mathcal{L}$ v $\mathcal{Q}$ je $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{Q}$. Potom má $\mathcal{Q}$ maximální prvek.*

Zornovo lemma je ekvivalentní s *axiomem výběru* a je nezávislé na ostatních axiomech teorie množin.

Lemma 4.1.1. *Buď (X, τ) topologický prostor a $\mathcal{S}$ sub-báze topologie τ. Topologický prostor X je kvazikompaktní právě když lze z každého jeho pokrytí množinami sub-báze $\mathcal{S}$ vybrat konečné podpokrytí.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Tato implikace je zřejmá z definice.

($\Leftarrow$) Symbolem $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ označme množinu všech pokrytí prostoru X ze kterých nelze vybrat konečné podpokrytí. Na množině $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ uvažme uspořádání inkluzí. Pro spor předpokládejme, že prostor X není kvazikompaktní, tj., že je množina $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ neprázdná. Buď $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ řetězec v $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ a předpokládejme, že $\bigcup \boldsymbol{\mathcal{L}} \notin \boldsymbol{\mathcal{P}}$. To znamená, že z pokrytí $\bigcup \boldsymbol{\mathcal{L}}$ lze vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{F}$. Protože je množina $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ lineárně uspořádaná inkluzí a pokrytí $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \boldsymbol{\mathcal{L}}$ konečné, existuje pokrytí $\mathcal{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$ takové, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}$. To je ve sporu s tím, že $\mathcal{Q} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$, neboť z $\mathcal{Q}$ stejně jako z $\bigcup \boldsymbol{\mathcal{L}}$ lze vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{F}$. Podle Zornova lemmatu existuje maximální pokrytí $\mathcal{M} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ vzhledem k inkluzi.

Položme $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$. Množina $\mathcal{T}$ je obsažena v $\mathcal{M}$ a proto z ní nelze vybrat konečné podpokrytí. Současně množina $\mathcal{T}$ sestává z množin sub-báze $\mathcal{S}$. Vzhledem k našemu předpokladu, že každé pokrytí prostoru X množinami sub-báze $\mathcal{S}$ obsahuje konečné podpokrytí, existuje $y \in X \setminus \bigcup \mathcal{T}$. Protože $\mathcal{M}$ pokrývá X, existuje $Y \in \mathcal{M}$ obsahující bod y. Protože $\mathcal{S}$ je zub-báze, existují $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ tak, že $y \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subseteq Y$. Protože $y \notin \bigcup \mathcal{M}$, $S_i \notin \mathcal{M}$, pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Vzhledem k maximalitě $\mathcal{M}$ v množině $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, lze z každé z množin $\mathcal{M} \cup \{S_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, vybrat konečné pokrytí. Proto existují množiny $Z_1, \ldots, Z_m \in \mathcal{M}$ takové, že

$$X = S_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} Z_j,$$

pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Odtud plyne, že

$$X = \bigcap_{i=1}^{n} \left(S_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} Z_j \right) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} Z_j \right) \subseteq Y \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} Z_j \right).$$

To je ve sporu s předpokladem, že z množiny $\mathcal{M}$ nelze vybrat konečné pokrytí X, neboť $\{Y, Z_1, \ldots, Z_m\} \subseteq \mathcal{M}$. □

Důsledek 4.1.2. *Buď (X, τ) Hausdorffův topologický prostor a $\mathcal{S}$ sub-báze topologie τ. Topologický prostor X je kompaktní právě když lze z každého jeho pokrytí množinami sub-báze $\mathcal{S}$ vybrat konečné podpokrytí.*

4.2. Součin topologických prostorů

Nechť τ, υ jsou topologie na množině X. Řekneme, že topologie τ je *jemnější* než topologie υ, je-li $\upsilon \subseteq \tau$. Ekvivalentně řekneme, že topologie υ je *hrubší* než topologie τ. Všimněme si, že topologie τ je *jemnější* než topologie υ právě když je identické zobrazení $(X, \tau) \to (X, \upsilon)$ spojité.

Definice. Nechť Y je množina, $\langle (Y_i, \tau_i) \mid i \in I \rangle$ soubor topologických prostorů a $\mathcal{F} := \langle f_i \colon Y \to Y_i \mid i \in I \rangle$ soubor zobrazení. Topologii τ jejíž sub-báze je tvořena množinou $\left\{ f_i^{-1}(A) \mid i \in I \text{ a } A \in \tau_i \right\}$ nazveme *topologií generovanou* souborem zobrazení $\mathcal{F}$[1].

Z definice je zřejmé, že topologie generovaná souborem zobrazení $\mathcal{F}$ je nejhrubší topologií na množině Y takovou, že jsou zobrazení $f_i \colon (Y, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$, $i \in I$, spojitá.

Lemma 4.2.1. *Buď $\langle Y_i \mid i \in I \rangle$ soubor topologických prostorů, Y prostor s topologií generovanou souborem zobrazení $\langle f_i \colon Y \to Y_i \mid i \in I \rangle$ a X topologický prostor. Potom je zobrazení $f \colon X \to Y$ spojité právě když jsou spojitá všechna složení $f_i \circ f$, $i \in I$.*

[1] Předpokládáme, že prostory (Y_i, τ_i) jsou dány z kontextu.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Je-li zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité, jsou spojitá i složení $f_i \circ f$, $i \in I$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že jsou všechna složení $f_i \circ f$, $i \in I$, spojitá. Potom pro každé $i \in I$ a každou otevřenou podmnožinu $A \subseteq Y_i$ platí, že je množina $(f_i \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(f_i^{-1}(A))$ spojitá. Podle definice je množina $\left\{f_i^{-1}(A) \mid i \in I \text{ a } A \subseteq Y_i \text{ otevřená}\right\}$ sub-bázi prostoru Y. Vzhledem k Lemmatu 2.1.4 je zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité. $\square$

Definice. Buď $\langle (X_i, \tau_i) \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů. Uvažme množinu

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{\langle x_i\rangle_{i\in I} \mid \forall\, i \in I\colon x_i \in X_i\right\}.$$

Pro každé $i \in I$ dále uvažme projekci $p_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ danou předpisem $\langle x_i\rangle_{i\in I} \mapsto x_i$. Na množině $\prod_{i\in I} X_i$ uvažme topologii $\tau = \prod_{i\in I} \tau_i$ generovanou souborem zobrazení $\langle p_i \mid i \in I\rangle$. Potom nazveme topologický prostor $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$ *součinem prostorů* X_i, $i \in I$. Topologii τ nazveme *součinovou topologií* tohoto prostoru.

Z definic je ihned vidět, že sub-báze topologie τ sestává z množin

$$p_j^{-1}(A) = \left\{\langle x_i\rangle_{i\in I} \mid x_j \in A\right\},$$

kde $j \in I$ a $A \in \tau_j$. Je zřejmé, že podmínku $A \in \tau_j$ můžeme nahradit podmínkou $A \in \mathcal{S}_j$, kde $\mathcal{S}_j$ jsou sub-báze topologií τ_j, $j \in I$.

Protože konečné průniky množin nějaké sub-báze daného topologického prostoru tvoří jeho bázi platí, že

Tvrzení 4.2.2. *Množiny tvaru $\prod_{i\in I} A_i$, kde $A_i \in \tau_i$ a $A_i = X_i$ pro skoro všechna*[2] *$i \in I$ tvoří bázi topologie $\prod_{i\in I} \tau_i$.*

Podmínku $A_i \in \tau_i$ lze nahradit podmínkou $A_i \in \mathcal{B}_i$, kde $\mathcal{B}_i$ jsou báze prostorů X_i, $i \in I$.

Je-li indexová množina I konečná, pro jednoduchost předpokládejme $I = \{1, \dots, n\}$, je báze součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ tvořena množinami tvaru $\prod_{i=1}^n A_i$, kde A_i je otevřená podmnožina X_i pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Z Lemmatu 4.2.1 a z definice kartézského součinu ihned plyne, že

Věta 4.2.3. *Buď $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů a X topologický prostor. Zobrazení $f\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ je spojité právě když jsou spojitá všechna složení $p_i \circ f$, $i \in I$, tohoto zobrazení s projekcemi na jednotlivé složky kartézského součinu.*

Lemma 4.2.4. *Nechť je dán soubor topologických prostorů $\langle X_i \mid i \in I\rangle$ a pro každé $i \in I$ podmnožina $Y_i \subseteq X_i$. Potom platí, že*

$$\overline{\prod_{i\in I} Y_i} = \prod_{i\in I} \overline{Y_i}.$$

[2] Existuje konečná $F \subseteq I$ taková, že $A_i = X_i$ pro všechna $i \in I \setminus F$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \setminus \left(\prod_{i\in I} \overline{Y_i}\right)$. Potom existuje $i \in I$ takové, že $x_i \notin \overline{Y_i}$. Podle definice kartézského součinu je $p_i^{-1}(X_i \setminus \overline{Y_i})$ okolím $\langle x_i\rangle_{i\in I}$, které je disjunktní s $\prod_{i\in I} \overline{Y_i}$. Proto je množina $\prod_{i\in I} \overline{Y_i}$ uzavřená, odkud je vidět, že $\overline{\prod_{i\in I} Y_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{Y_i}$.

Nechť naopak $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{Y_i}$. Buď U okolí $\langle x_i\rangle_{i\in I}$. Potom U obsahuje podmnožinu tvaru $\prod_{i\in I} U_i$, kde U_i je okolí x_i v X_i pro každé $i \in I$ (a $U_i = X_i$ pro skoro všechna $i \in I$). Z toho, že $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{Y_i}$ plyne, že $x_i \in \overline{Y_i}$ pro všechna $i \in I$. Odtud dostaneme, že $U_i \cap Y_i \neq \emptyset$ pro všechna $i \in I$ a tedy $U \cap \prod_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$. Proto platí, že $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in \overline{\prod_{i\in I} Y_i}$. Ukázali jsme tak, že $\prod_{i\in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} Y_i}$. □

Důsledek 4.2.5. *Nechť je dán soubor topologických prostorů $\langle X_i \mid i \in I\rangle$ a pro každé $i \in I$ podmnožina $\emptyset \neq G_i \subseteq X_i$. Potom je součin $\prod_{i\in I} G_i$ uzavřený v $\prod_{i\in I} X_i$, právě když jsou podmnožiny G_i uzavřené v X_i pro všechna $i \in I$.*

Připomeňme, že symbolem $\mathbb{I}$ značíme podprostor $\langle 0, 1\rangle$ reálné přímky.

Lemma 4.2.6. *Nechť X je topologický prostor, J konečná množina a $\langle f_j \colon X \to \mathbb{I} \mid j \in J\rangle$ soubor spojitých zobrazení. Potom je zobrazení $f \colon X \to \mathbb{I}$ definované předpisem $x \mapsto \max_{j\in J} f_j(x)$ spojité.*

Důkaz. Intervaly $(a, 1\rangle$ a $\langle 0, a)$, kde $0 < a < 1$, tvoří sub-bázi prostoru $\mathbb{I}$. Vzhledem k Lemmatu 2.1.4 stačí ukázat, že jsou vzory těchto intervalů otevřené. Nechť $a \in (0, 1)$ a nechť $x \in X$ je takové, že $a < f(x) = \max_{j\in J} f_j(x)$. Potom existuje $j \in J$ takové, že $a < f_j(x)$. Podle předpokladu je zobrazení f_j spojité, a proto existuje okolí U bodu x takové, že $a < f_j(y)$ pro každé $y \in U$. Vzhledem k tomu, že $f_j(y) \leq f(y)$, je také $a < f(y)$ pro každé $y \in U$. Proto je $f^{-1}((a, 1\rangle)$ otevřená podmnožina X. Buď nyní $x \in X$ takové, že $f(x) < a$. Potom pro každé $j \in J$ platí nerovnost $f_j(x) < a$. Ze spojitosti zobrazení f_j plyne, že existuje okolí U_j bodu x takové, že $f_j(y) < a$ pro každé $y \in U_j$. Potom je $x \in U = \bigcap_{j\in J} U_j$, množina U je okolím bodu x a je-li $y \in U$, je $f_j(y) < a$ pro všechna $j \in J$. Odtud plyne, že $f(y) < a$ pro všechna $y \in U$. Vidíme, že je množina $f^{-1}(\langle 0, a))$ otevřená. □

Tvrzení 4.2.7. *Buď $j \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Je-li $\langle X_i \mid i \in I\rangle$ soubor T_j prostorů, potom je součin $\prod_{i\in I} X_i$ také T_j prostorem.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme pro $j = 2$ a $j = 3\frac{1}{2}$. Zbylé případy ponecháme jako cvičení.

Předpokládejme, že X_i, $i \in I$, jsou T_2 prostory. Nechť $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ a $\langle y_i\rangle_{i\in I}$ jsou dva různé prvky součinu $\prod_{i\in I} X_i$. Existuje $i \in I$ tak, že $x_i \neq y_i$. Protože je prostor X_i Hausdorffův, existují disjunktní otevřené $A, B \subseteq X_i$ takové, že $x_i \in A$ a $y_i \in B$. Potom jsou $p_i^{-1}(A)$ a $p_i^{-1}(B)$ disjunktní otevřené podmnožiny kartézského součinu $\prod_{i\in I} X_i$ takové, že $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in p_i^{-1}(A)$ a $\langle y_i\rangle_{i\in I} \in p_i^{-1}(B)$. Proto je součin $\prod_{i\in I} X_i$ Hausdorffův.

Předpokládejme, že X_i, $i \in I$, jsou $T_{3\frac{1}{2}}$ prostory. Potom jsou všechny Hausdorffovy a tedy jejich součin je Hausdorffův, speciálně je T_1. Nechť $\langle x_i \rangle_{i \in I}$ je prvek a G je uzavřená podmnožina součinu $\prod_{i \in I} X_i$ a předpokládejme, že $\langle x_i \rangle_{i \in I} \notin G$. Buď $\mathcal{B}$ báze součinu $\prod_{i \in I} X_i$ popsaná v Tvrzení 4.2.2. Protože je množina G uzavřená, existuje $A = \prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}$ obsahující x a disjunktní s G. Navíc existuje konečná podmnožina J indexové množiny I, taková, že $A_i = X_i$ pro každé $i \in I \setminus J$. Protože prostory X_i, $i \in I$, jsou všechny $T_{3\frac{1}{2}}$, existuje pro každé $j \in J$ spojité zobrazení $f_j \colon X_j \to \mathbb{I}$ takové, že $f_j(x_j) = 0$ a $f_j(X_j \setminus A_j) = \{1\}$. Položme $f = \max_{j \in J}(f_j \circ p_j)$ (kde $p_j \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ jsou kanonické projekce). Vzhledem k Lemmatu 4.2.6 je zobrazení f spojité. Pro každé $j \in J$ platí, že $(f_j \circ p_j)(\langle x_i \rangle_{i \in I}) = f_j(x_j) = 0$, odkud je vidět, že $f(\langle x_i \rangle_{i \in I}) = 0$. Buď $\langle y_i \rangle_{i \in I} \in G$. Protože jsou množiny A a G disjunktní, existuje $j \in J$ takové, že $y_j \notin A_j$. Potom je $(f_j \circ p_j)(\langle y_i \rangle_{i \in I}) = f_j(y_j) = 1$, odkud plyne, že $f(\langle y_i \rangle_{i \in I}) = 1$. □

POZNÁMKA. *Poznamenejme, že kartézský součin dvou normálních prostorů nemusí být normální.*

4.3. (Kvazi)kompaktnost a součin

Nechť $\langle (X_i, \tau_i) \mid i \in I \rangle$ je soubor topologických prostorů. Sub-báze topologie jejich součinu $\prod_{i \in I} X_i$ je podle definice množina $\mathcal{S} := \{p_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\}$. Pro každou množinu $S \in \mathcal{S}$ zvolme $i_S \in I$ tak, že $S = p_{i_S}^{-1}(A)$ pro nějakou $A \in \tau_{i_S}$ a položme $A_S := A$.

VĚTA 4.3.1 (Tichonovova). *Nechť $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ je soubor kvazikompaktních prostorů. Potom je součin $\prod_{i \in I} X_i$ kvazikompaktní.*

DŮKAZ. Buď $\mathcal{S} := \{p_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\}$ sub-báze součinu $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ a definujme i_S pro každé $S \in \mathcal{S}$ jako v úvodu podkapitoly. Podle Lemmatu 4.1.1 stačí ukázat, že z každého pokrytí $\mathcal{T}$ prostoru $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ množinami sub-báze $\mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí. Pro každé $i \in I$ $\mathcal{T}_i := \{T \in \mathcal{T} \mid i_T = i\}$.

Ukážeme, že existuje $k \in I$ takové, že $X_k = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_k} A_T$. Pro spor předpokládejme opak. Potom pro každé $i \in I$ existuje $x_i \in X_i \setminus \bigcup_{T \in \mathcal{T}_i} A_T$. Protože $\prod_{i \in I} X_i = \bigcup \mathcal{T}$, existuje $S \in \mathcal{T}$ tak, že $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in S$. Potom ale $x_{i_S} \in A_S$, což je ve sporu s volbou $x_{i_S} \in X_{i_S} \setminus \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{i_S}} A_T$ neboť $S \in \mathcal{T}_{i_S}$.

Protože je prostor X_k kvazikompaktní, existuje konečná podmnožina $J \subseteq \mathcal{T}_k$ taková, že $X_k = \bigcup_{j \in J} A_{T_j}$. Potom je ale $\prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} T_j$ a proto je $\{T_j \mid j \in J\}$ konečné podpokrytí vybrané z $\mathcal{T}$. □

Z Tvrzení 4.2.7 a Věty 4.3.1 ihned plyne, že

DŮSLEDEK 4.3.2. *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

KAPITOLA 5

Otevřená a uzavřená zobrazení, diagonální zobrazení

ABSTRAKT. *Charakterizujeme otevřená a uzavřená zobrazení. Dále definujeme diagonální zobrazení (určené souborem zobrazení) do součinu topologických prostorů a ukážeme, že pokud daný soubor zobrazení odděluje body a otevřené množiny a výchozí prostor je alespoň T_1, je diagonální zobrazení homeomorfním vnořením. Pomocí tohoto tvrzení ukážeme, že Tichonovovy prostory jsou právě podprostory kompaktních prostorů, a že kompaktní prostory jsou právě prostory homeomorfní uzavřeným podprostorům kartézských mocnin uzavřeného jednotkového intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1 \rangle$.*

5.1. Otevřená a uzavřená zobrazení

Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *uzavřené* (resp. *otevřené*) je-li spojité a obrazem každé uzavřené (resp. otevřené) podmnožiny prostoru X je uzavřená (resp. otevřená) podmnožina prostoru Y.

LEMMA 5.1.1. *Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Zobrazení f je uzavřené právě když pro každou podmnožinu $Z \subseteq Y$ a každou otevřenou podmnožinu $A \subseteq X$ takovou, že $f^{-1}(Z) \subseteq A$, existuje otevřená $B \subseteq Y$ taková, že $Z \subseteq B$ a $f^{-1}(B) \subseteq A$.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je zobrazení f uzavřené. Protože je A otevřená, je $f(X \setminus A)$ uzavřená podmnožina Y. Položme $B := Y \setminus f(X \setminus A)$. Potom je B otevřená podmnožina Y. Protože $f^{-1}(Z) \subseteq A$, je $Z \subseteq Y \setminus f(X \setminus A) = B$. Protože $B \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ platí, že $f^{-1}(B) \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Buď G uzavřená podmnožina prostoru X. Položme $A := X \setminus G$ a $Z := Y \setminus f(G)$. Protože je G uzavřená, je množina A otevřená. Dále platí, že

$$f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus f(G)) = X \setminus f^{-1}(f(G)) \subseteq X \setminus G = A.$$

Podle předpokladu existuje otevřená $B \subseteq Y$ taková, že $Z \subseteq B$ a současně $f^{-1}(B) \subseteq A$. Protože $Z = Y \setminus f(G)$, dostaneme z inkluze $Z \subseteq B$, že $Y = B \cup f(G)$. Protože $A = X \setminus G$, plyne z $f^{-1}(B) \subseteq A$, že $B \cap f(G) = \emptyset$. Dostáváme tak, že $B = Y \setminus f(G)$ a protože je B otevřená, je $f(G)$ uzavřená. $\square$

Podobně bychom ukázali, že

LEMMA 5.1.2. *Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Zobrazení f je otevřené právě když pro každou podmnožinu $Z \subseteq Y$ a každou uzavřenou* *podmnožinu $G \subseteq X$ takovou, že $f^{-1}(Z) \subseteq G$, existuje uzavřená $H \subseteq Y$ taková, že $Z \subseteq H$ a $f^{-1}(H) \subseteq G$.*

Z Lemmatu 5.1.1 odvodíme, že

LEMMA 5.1.3. *Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Zobrazení f je uzavřené právě když pro každý bod $y \in Y$ a každou otevřenou $A \subseteq X$ takovou, že $f^{-1}(y) \subseteq A$ existuje okolí U bodu y takové, že $f^{-1}(U) \subseteq A$.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Plyne z Lemmatu 5.1.1, položíme-li $Z = \{y\}$. ($\Leftarrow$) Nechť $Z \subseteq Y$ a $A \subseteq X$ je taková, že $f^{-1}(Z) \subseteq A$. Pro každé $z \in Z$ je potom $f^{-1}(z) \subseteq f^{-1}(Z) \subseteq A$ a proto existuje okolí U_z bodu z takové, že $f^{-1}(U_z) \subseteq A$. Položme $B = \bigcup_{z \in Z} \breve{U}_z$. Snadno nahlédneme, že $Z \subseteq B$, B je otevřená a $f^{-1}(B) \subseteq A$. Z Lemmatu 5.1.1 nyní plyne, že je zobrazení f uzavřené. $\square$

Následující věta plyne ihned z Lemmatu 2.1.2:

VĚTA 5.1.4. *Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f\colon X \to Y$ bijekce. Potom je ekvivalentní:*

(1) *zobrazení f je homeomorfismus;*
(2) *zobrazení f je otevřené;*
(3) *zobrazení f je uzavřené.*

5.2. Diagonální zobrazení

Buď $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů, X topologický prostor a $\mathcal{F} := \langle f_i\colon X \to Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor spojitých zobrazení. Jako dosud budeme značit $p_i\colon \prod_{i\in I} Y_i \to Y_i$ kanonické projekce na jednotlivé složky kartézského součinu prostoru Y_i. *Diagonálou* souboru $\mathcal{F}$ budeme rozumět zobrazení

$$\Delta_{\mathcal{F}}\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i, \quad \text{dané předpisem} \quad x \mapsto \langle f_i(x)\rangle_{i\in I}\,. \tag{8}$$

LEMMA 5.2.1. *Platí, že $p_i \circ \Delta_{\mathcal{F}} = f_i$ pro všechna $i \in I$. Je-li $g\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ zobrazení takové, že $p_i \circ g_i = f_i$ pro všechna $i \in I$, potom $g = \Delta_{\mathcal{F}}$.*

DŮKAZ. Lemma plyne z rovnosti

$$p_i(\langle y_i\rangle_{i\in I}) = y_i,$$

pro všechna $i \in I$ a všechna $\langle y_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$. $\square$

Symbolem 1_X budeme značit identický homeomorfismus na topologickém prostoru X.

VĚTA 5.2.2. *Buď $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů. Nechť Y je topologický prostor a $\mathcal{F} := \langle f_i\colon Y \to Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor spojitých zobrazení. Potom je ekvivalentní:*

(1) *Pro každý topologický prostor X a každý soubor spojitých zobrazení $\mathcal{G} := \langle g_i\colon X \to Y_i \mid i \in I\rangle$ existuje právě jedno spojité spojité zobrazení $\delta_{\mathcal{G}}\colon X \to Y$ takové, že $f_i \circ \delta_{\mathcal{G}} = g_i$ pro všechna $i \in I$.*

(2) *Zobrazení* $\Delta_{\mathcal{F}}\colon Y \to \prod_{i\in I} Y_i$ *definované předpisem* (8) *je homeomorfismus.*

DŮKAZ. (1 $\Rightarrow$ 2) Uvažme soubor $\mathcal{P} := \left\langle p_j\colon \prod_{i\in I} Y_i \to Y_j \mid j \in I\right\rangle$ kanonických projekcí. Z předpokladů plyne, že existuje právě jedno zobrazení $\delta_{\mathcal{P}}\colon \prod_{i\in I} Y_i \to X$ takové, že $f_i \circ \delta_{\mathcal{P}} = p_i$ pro všechna $i \in I$. Podle Lemmatu 5.2.1 platí, že $p_i \circ \Delta_{\mathcal{F}} = f_i$ pro každé $i \in I$. Odtud plyne, že

$$p_i \circ \Delta_{\mathcal{F}} \circ \delta_{\mathcal{P}} = p_i \quad \text{a} \quad f_i \circ \delta_{\mathcal{P}} \circ \Delta_{\mathcal{F}} = f_i$$

platí pro všechna $i \in I$. Z jednoznačnosti zobrazení s těmito vlastnostmi plyne, že

$$\Delta_{\mathcal{F}} \circ \delta_{\mathcal{P}} = 1_{\prod_{i\in I} Y_i} \quad \text{a} \quad \delta_{\mathcal{P}} \circ \Delta_{\mathcal{F}} = 1_Y.$$

Proto jsou $\Delta_{\mathcal{F}}$ a $\delta_{\mathcal{P}}$ vzájemně inverzními homeomorfismy, tj. $\delta_{\mathcal{P}} = \Delta_{\mathcal{F}}^{-1}$.

(2 $\Rightarrow$ 1) Předpokládejme, že $\Delta_{\mathcal{F}}$ je homeomorfismus. Položme $\delta_{\mathcal{G}} := \Delta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \Delta_{\mathcal{G}}$. Potom platí, že

$$f_i \circ \delta_{\mathcal{G}} = f_i \circ \Delta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \Delta_{\mathcal{G}} = p_i \circ \Delta_{\mathcal{F}} \circ \Delta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \Delta_{\mathcal{G}} = p_i \circ \Delta_{\mathcal{G}} = g_i$$

pro všechna $i \in I$. Zbývá ukázat jednoznačnost. Buď $\delta'\colon X \to Y$ zobrazení takové, že $f_i \circ \delta' = g_i$ pro všechna $i \in I$. Potom $p_i \circ \Delta_{\mathcal{F}} \circ \delta' = g_i$ pro všechna $i \in I$. Z Lemmatu 5.2.1 plyne jednoznačnost zobrazení $\Delta_{\mathcal{G}}$ a proto $\Delta_{\mathcal{F}} \circ \delta' = \Delta_{\mathcal{G}}$. Odtud již snadno odvodíme, že

$$\delta_{\mathcal{G}} = \Delta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \Delta_{\mathcal{G}} = \Delta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ \Delta_{\mathcal{F}} \circ \delta' = \delta'.$$

□

DEFINICE. Řekneme, že spojité zobrazení $f\colon X \to Y$ *odděluje body a uzavřené množiny* pokud pro každý bod $x \in X$ a každou uzavřenou $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ platí, že $f(x) \notin \overline{f(G)}$.

LEMMA 5.2.3. *Buď* $f\colon X \to Y$ *prosté spojité zobrazení, které odděluje body a uzavřené množiny. Potom je* f *homeomorfní vnoření na podprostor* Y.

DŮKAZ. Vzhledem k Větě 5.1.4 stačí ukázat, že je zobrazení $f\colon X \to f(X)$ uzavřené. Buď G uzavřená podmnožina X a $x \in X \setminus G$. Protože zobrazení f odděluje body a uzavřené množiny platí, že $f(x) \notin \overline{f(G)}$. Odtud plyne, že je $f(X) \setminus f(G)$ okolím bodu $f(x)$ v podprostoru $f(X)$. Protože je množina $f(X) \setminus f(G)$ okolím každého svého bodu, je otevřená v $f(X)$. Odtud plyne, že $f(G)$ je uzavřená v $f(X)$. □

DEFINICE. Buď X topologický prostor, $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů a $\mathcal{F} = \langle f_i\colon X \to Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor spojitých zobrazení.

(a) Řekneme, že soubor $\mathcal{F}$ *odděluje body* pokud pro každé $x \neq y$ z X existuje $i \in I$ takové, že $f_i(x) \neq f_i(y)$.
(b) Řekneme, že soubor $\mathcal{F}$ *odděluje body a uzavřené množiny* pokud pro každý bod $x \in X$ a každou uzavřenou $G \subseteq X$ takovou, že $x \notin G$ existuje $i \in I$ takové, že $f_i(x) \notin \overline{f_i(G)}$.

Lemma 5.2.4. *Buď X topologický prostor, $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů a $\mathcal{F} = \langle f_i \colon X \to Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor spojitých zobrazení. Potom platí, že*

(1) *soubor $\mathcal{F}$ odděluje body právě když je zobrazení $\Delta_{\mathcal{F}} \colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ prosté.*
(2) *pokud soubor $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny, pak zobrazení $\Delta_{\mathcal{F}} \colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ odděluje body a uzavřené množiny.*

Důkaz. Část (1) je zřejmá z definice. Ukážeme (2). Předpokládejme, že soubor $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny. Buď G uzavřená podmnožina X a $x \notin G$ bod. Vzhledem k Lemmatu 4.6 platí, že

$$\overline{\Delta_{\mathcal{F}}(G)} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} f_i(G)} = \prod_{i\in I} \overline{f_i(G)}. \tag{9}$$

Protože soubor $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny, existuje $i \in I$ takové, že $f_i(x) \notin \overline{f_i(G)}$. Odtud plyne, že $\Delta_{\mathcal{F}}(x) \notin \prod_{i\in I} \overline{f_i(G)}$. Vzhledem k (9) odtud dostaneme, že $\Delta_{\mathcal{F}}(x) \notin \overline{\Delta_{\mathcal{F}}(G)}$. □

Všimněme si, že pokud X je T_1 prostor a zobrazení $f \colon X \to Y$ odděluje body a uzavřené množiny, potom f odděluje body. Vzhledem k Lemmatům 5.2.3 a 5.2.4 pak platí, že

Lemma 5.2.5. *Buď X topologický prostor, $\langle Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor topologických prostorů a $\mathcal{F} = \langle f_i \colon X \to Y_i \mid i \in I\rangle$ soubor spojitých zobrazení. Pokud X je T_1 prostor a soubor $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny, je $\Delta_{\mathcal{F}}$ homeomorfní vnoření.*

5.3. Vnoření do kompaktních prostorů

Jako v předchozím nechť $\mathbb{I}$ značí podprostor reálné přímky $\langle 0, 1\rangle$. Je-li dán topologický prostor X a množina I, budeme značit $X^I := \prod_{i\in I} X_i$, kde $X_i = X$ pro všechna $i \in I$. Prostor X^I budeme nazývat *kartézskou mocninou* prostoru X.

Lemma 5.3.1. *Buď $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. Každý podprostor T_i prostoru je také T_i prostor.*

Důkaz. Důkazy pro jednotlivá i jsou přímočaré. Omezíme se na případy $i = 1$ a $i = 3\frac{1}{2}$.

Nechť $i = 1$, X je T_1 prostor a Y je podprostor X. Pro každý bod $y \in Y$ je $\{y\}$ uzavřená podmnožina X a tedy je to také uzavřená podmnožina podprostoru Y. Odtud plyne, že Y je T_1 prostor.

Nechť $i = 3\frac{1}{2}$, X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y je podprostor X. Buď $y \in Y$ a $G \subseteq Y$ uzavřená v Y taková, že $y \notin G$. Existuje H uzavřená v X taková, že $G = H \cap Y$. Protože $y \notin G$, je $y \notin H$. Prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ a proto existuje spojité zobrazení $f \colon X \to \mathbb{I}$ taková, že $f(x) = 0$ a $f(H) = \{1\}$. Potom je restrikce $f \restriction Y$ spojité zobrazení $Y \to \mathbb{I}$ oddělující x a G. □

LEMMA 5.3.2. *Každý Tichonovův prostor lze homeomorfně vnořit do kartézské mocniny intervalu* $\mathbb{I}$.

DŮKAZ. Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor. Buď $\mathcal{F} := \langle f_j \colon X \to \mathbb{I} \mid j \in J \rangle$ systém všech spojitých zobrazení z X do $\mathbb{I}$. Protože je prostor X Tichonovův, systém zobrazení $\mathcal{F}$ odděluje body a uzavřené množiny. Podle Lemmatu 5.2.5 je $\Delta_{\mathcal{F}} \colon X \to \mathbb{I}^J$ homeomorfní vnoření. □

VĚTA 5.3.3. *Topologický prostor je* $T_{3\frac{1}{2}}$ *právě když je homeomorfní podprostoru kompaktního prostoru.*

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Podle předchozího lemmatu lze každý $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor vnořit do kartézské mocniny $\mathbb{I}$. Interval $\mathbb{I}$ je kompaktní a podle Důsledku 4.3.2 je každá jeho kartézská mocnina kompaktní. ($\Leftarrow$) Podle Věty 3.2.4 je každý kompaktní prostor normální. Vzhledem k Důsledku 2.2.8 je každý kompaktní prostor Tichonovův. Z Lemmatu 5.3.1 odvodíme, že je Tichonovův také každý podprostor homeomorfní podprostoru kompaktního prostoru. □

VĚTA 5.3.4. *Topologický prostor je kompaktní právě když je homeomorfní uzavřenému podprostoru kartézské mocniny* $\mathbb{I}$.

DŮKAZ. ($\Rightarrow$) Kompaktní prostor je Tichonovův a proto jej lze homeomorfně vnořit do kartézské mocniny intervalu $\mathbb{I}$. Podle Lemmatu 3.2.5 je obraz tohoto vnoření uzavřený. ($\Leftarrow$) Podle Důsledku 4.3.2 je kartézská mocnina intervalu $\mathbb{I}$ kompaktní a vzhledem k Lemmatu 3.2.1 je také její uzavřený podprostor kompaktní. □

POZNÁMKA. *Niemytzkého rovina je příkladem Tichonovova prostoru, který není normální. Podle Věty 5.3.3 je vnořitelná do kompaktního a proto normálního prostoru. Odtud je vidět, že podprostor normálního prostoru nemusí být normální.*

KAPITOLA 6

Husté podmnožiny, lokálně kompaktní prostory

ABSTRAKT. *Nejprve se podíváme na některé vlastnosti hustých podmnožin topologických prostorů, zejména v souvislosti se spojitými zobrazeními. Pak definujeme lokálně kompaktní topologické prostory a ukážeme, že jsou Tichonovovy. Nakonec charakterizujeme lokálně kompaktní prostory jako husté otevřené podmnožiny kompaktních prostorů.*

6.1. Husté podmnožiny

Řekneme, že podmnožina H topologického prostoru X je *hustá*, jestliže $H \cap A \neq \emptyset$ pro každou neprázdnou otevřenou $A \subseteq X$. Snadno nahlédneme, že $H \subseteq X$ je hustá právě když $X = \overline{H}$.

PŘÍKLAD 6.1.1. *Platí, že*

- *množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustou podmnožinou reálné přímky $\mathbb{R}$,*
- *množina $\{\langle x_i \rangle_{i \in I} \mid x_i = 0$ pro skoro všechna $I\}$ je hustou podmnožinou kartézské mocniny 2^I diskrétního dvouprvkového prostoru.*

Řekneme, že podmnožina R topologického prostoru X je *řídká*, je-li množina $X \setminus \overline{R}$ hustá.

PŘÍKLAD 6.1.2. *Cantorovo diskontinuum je uzavřená řídká podmnožina uzavřeného intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1 \rangle$ mohutnosti kontinua.*

Topologický prostor je *separabilní*, jestliže má (nejvýše) spočetnou hustou podmnožinu. Příklad 6.1.1 sestává ze separabilních Hausdorffových prostorů mohutnosti kontinua (ve druhém případě pokud je množina I spočetná).

TVRZENÍ 6.1.1. *Buď H hustá podmnožina topologického prostoru X. Pro každou otevřenou $A \subseteq X$ platí rovnost $\overline{A} = \overline{H \cap A}$.*

DŮKAZ. Jistě platí, že $\overline{A \cap H} \subseteq \overline{A}$. Ukážeme opačnou inkluzi. Nechť $x \in \overline{A}$ a U je otevřené okolí x. Potom je $A \cap U$ neprázdná otevřená podmnožina X. Protože je množina H hustá, je množina $H \cap A \cap U$ neprázdná. Odtud je vidět, že $x \in \overline{H \cap A}$. □

LEMMA 6.1.2. *Buď H hustá podmnožina topologického prostoru X. Nechť Y je Hausdorffův topologický prostor a $f, g \colon X \to Y$ jsou spojitá zobrazení. Potom*

$$f \restriction H = g \restriction H \implies f = g.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f \restriction H = g \restriction H$ a existuje bod $x \in X$ takový, že $f(x) \neq g(x)$. Protože je prostor Y Hausdorffův, existují disjunktní otevřené $A, B \subseteq Y$ takové, že $f(x) \in A$ a $g(x) \in B$. Protože jsou zobrazení f a g spojitá, jsou vzory $f^{-1}(A)$ a $g^{-1}(B)$ otevřené. Protože $x \in f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$, je $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ neprázdná otevřená podmnožina X. Protože je $H \subseteq X$ hustá, existuje

$$h \in H \cap f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B).$$

Potom ale $f(h) \subseteq A$ a zároveň $g(h) \subseteq B$. Protože jsou množiny A, B disjunktní, je $f(h) \neq g(h)$. To je ve sporu s předpokladem $f \restriction H = g \restriction H$. $\square$

6.2. Lokálně kompaktní prostory

Řekneme, že topologický prostor X je *lokálně kompaktní*, jestliže každý bod $x \in X$ má okolí U jehož uzávěr $\overline{U}$ je kompaktní. Všimněme si, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že U je otevřené okolí.

Lemma 6.2.1. *Každý lokálně kompaktní prostor je Tichonovův*[1].

Důkaz. Buď X lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť G je uzavřená podmnožina X a $x \in X \setminus G$. Protože prostor X je lokálně kompaktní, najdeme otevřené okolí U bodu x jehož uzávěr je kompaktní. Položme $G_0 := (G \cap \overline{U}) \cup \overline{U} \setminus U$. Podle Věty 3.2.4 je každý kompaktní prostor normální a podle Urysohnova Lemmatu 2.2.7 je Tichonovův. Proto existuje spojité zobrazení $g\colon \overline{U} \to \mathbb{I}$ takové, že $g(x) = 0$ a $g(G_0) = \{1\}$. Toto zobrazení rozšíříme na zobrazení $f\colon X \to \mathbb{I}$ tak, že položíme $f(X \setminus \overline{U}) = \{1\}$. Z definic je vidět, že $f(x) = g(x) = 0$ a $f(G) = \{1\}$. Zbývá ukázat, že rozšíření $f\colon X \to \mathbb{I}$ je spojité. Již dříve jsme nahlédli, že množiny $\langle 0, a)$ a $(a, 1\rangle$, $0 < a < 1$, tvoří sub-bázi uzavřeného intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 1\rangle$. Buď tedy a reálné číslo takové, že $0 < a < 1$. Potom je $f^{-1}(\langle 0, a)) = g^{-1}(\langle 0, a)) \subseteq U$ otevřená podmnožina podprostoru $\overline{U}$. Proto existuje otevřená podmnožina A prostoru X taková, že $f^{-1}(\langle 0, a)) = A \cap \overline{U} = A \cap U$. Protože je U otevřené okolí bodu x, je tento průnik otevřenou podmnožinou prostoru X. Vzor $f^{-1}((a, 1\rangle)$ je otevřený právě když je jeho doplněk $f^{-1}(\langle 0, a\rangle)$ uzavřený. To je vidět z rovnosti $f^{-1}(\langle 0, a\rangle) = (X \setminus U) \cup g^{-1}(\langle 0, a\rangle)$ a z toho, že obě množiny $X \setminus U$ a $g^{-1}(\langle 0, a\rangle)$ jsou uzavřené v X. $\square$

Lemma 6.2.2. *Hustá lokálně kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru je otevřená.*

Důkaz. Buď X Hausdorffův prostor a L lokálně kompaktní hustá podmnožina X. Protože je podmnožina L lokálně kompaktní, existuje pro každé $x \in L$ otevřené okolí U_x takové, že $\overline{U_x} \cap L$ je kompaktní podmnožinou prostoru X. Podle Lemmatu 3.2.5 je množina $\overline{U_x} \cap L$ uzavřená a proto $\overline{U_x} \cap L = \overline{U_x \cap L}$. Odtud plyne, že je množina $A := X \setminus \big(\overline{U_x} \cap L\big)$ otevřená. Protože U_x je otevřené okolí bodu x, je průnik $A \cap U_x$ otevřený. Je-li

[1] $T_{3\frac{1}{2}}$

$A \cap U_x \neq \emptyset$, existuje $y \in (A \cap U_x) \cap L$. To plyne z toho, že L je v X hustá. Zároveň ale platí, že

$$A \cap (U_x \cap L) = \big(X \setminus (\overline{U_x} \cap L)\big) \cap (U_x \cap L) = \emptyset.$$

Proto je $A \cap U_x = \emptyset$. Odtud snadno nahlédneme, že $U_x \subseteq L$. To znamená, že L je otevřená. □

Z předchozího lemmatu dostaneme okamžitě, že

Důsledek 6.2.3. *Buď L lokálně kompaktní podmnožina Hausdorffova prostoru X. Potom je L otevřenou podmnožinou $\overline{L}$.*

Lemma 6.2.4. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor, K kompaktní podmnožina X a A otevřená množina v X taková, že $K \subseteq A$. Potom existuje otevřená množina U taková, že $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq A$ a $\overline{U}$ je kompaktní.*

Důkaz. Protože je prostor X lokálně kompaktní, existuje pro každý bod $x \in X$ otevřené okolí U_x tohoto bodu takové, že $\overline{U}_x$ je kompaktní. Současně, protože lokálně kompaktní prostor je Tichonovův a tedy regulární, má každý bod $k \in K$ otevřené okolí V_k takové, že $\overline{V_k} \subseteq A$. Položme $W_k = U_k \cap V_k$ pro všechna $k \in K$. Všimněme si, že $\overline{W}_k$ je uzavřenou podmnožinou kompaktní $\overline{U}_k$ a proto je kompaktní. Zároveň platí, že $\overline{W_k} \subseteq \overline{V_k} \subseteq A$. Množina $\{W_k \mid k \in K\}$ tvoří otevřené pokrytí K. Protože je K kompaktní, existuje konečná $J \subseteq K$ taková, že $K \subseteq \bigcup_{k\in J} W_k$. Položme $U = \bigcup_{k\in J} W_k$. Snadno nahlédneme, že sjednocením konečně mnoha kompaktních podmnožin X dostaneme kompaktní podmnožinu X. Proto je $\overline{U} = \bigcup_{k\in J} \overline{W_k}$ kompaktní. Nakonec protože $\overline{W_k} \subseteq A$ pro všechna $k \in K$, platí, že $\overline{U} \subseteq A$. □

Z definice plyne, že je každý lokálně kompaktní prostor je Hausdorffův.

Věta 6.2.5. *Buď X lokálně kompaktní prostor a $L \subseteq X$. Potom je ekvivalentní:*

(1) *Podmnožina L je lokálně kompaktní.*
(2) *Podmnožina L je otevřená v $\overline{L}$.*
(3) *Platí, že $L = A \cap G$, kde A je otevřená a G uzavřená podmnožina X.*

Důkaz. ($1 \Rightarrow 2$) Plyne z Důsledku 6.2.3. ($2 \Rightarrow 3$) Položíme $G = \overline{L}$. Je-li L otevřená v $\overline{L}$, potom existuje otevřená $A \subseteq X$ taková, že $L = A \cap \overline{L} = A \cap G$. ($3 \Rightarrow 1$) Předpokládejme, že $L = A \cap G$, kde A je otevřená a G uzavřená. Zvolme $x \in L$ libovolně. Vzhledem k Lemmatu 6.2.4 existuje otevřené okolí U bodu x takové, že uzávěr $\overline{U}$ je kompaktní a je obsažen v A. Potom je $\overline{U} \cap G = \overline{U} \cap L$ uzavřenou a tedy kompaktní podmnožinou $\overline{U}$. Proto je L lokálně kompaktní. □

KAPITOLA 7

Rozšíření spojitých zobrazení, kompaktifikace

ABSTRAKT. *Prostudujeme rozšíření spojitých zobrazení z podprostorů topologických prostorů. Definujeme pojem kompaktifikace a uvážíme množinu* $\boldsymbol{C}(X)$ *všech kompaktifikací Tichonovova prostoru* X. *Na množině* $\boldsymbol{C}(X)$ *definujeme tranzitivní a reflexivní relaci (tj., předuspořádání) a ukážeme, že ekvivalence indukovaná tímto předuspořádáním odpovídá homeomorfismům kompaktifikací. Nakonec charakterizujeme lokálně kompaktní množiny pomocí jejich kompaktifikací.*

7.1. Rozšíření spojitých zobrazení

Buď $\mathcal{F} := \langle f_i \colon A_i \to Y \mid i \in I \rangle$ soubor zobrazení do množiny Y. Řekneme, že soubor $\mathcal{F}$ je *kompatibilní*, pokud

$$f_i \restriction (A_i \cap A_j) = f_j \restriction (A_i \cap A_j), \qquad (\forall\, i, j \in I).$$

Sjednocením kompatibilního souboru $\mathcal{F}$ je zobrazení

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} f_i \colon \bigcup_{i \in I} A_i \to Y.$$

LEMMA 7.1.1. *Nechť* X, Y *jsou topologické prostory a nechť* $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ *je otevřené pokrytí* X. *Nechť* $\mathcal{F} := \langle f_i \colon A_i \to Y \mid i \in I \rangle$ *je kompatibilní soubor spojitých zobrazení. Potom je zobrazení* $\bigcup \mathcal{F} \colon X \to Y$ *spojité.*

DŮKAZ. Buď B otevřená podmnožina Y a $i \in I$. Protože je zobrazení $f_i \colon A_i \to Y$ spojité, je $f_i^{-1}(B)$ otevřená podmnožina A_i. Podle definice existuje otevřená podmnožina B_i prostoru X taková, že $f_i^{-1}(B) = B_i \cap A_i$. Protože je A_i otevřený podprostor X, je množina $f_i^{-1}(B)$ otevřená v X. Ze zřejmé rovnosti

$$\left(\bigcup \mathcal{F}\right)^{-1}(B) = \left(\bigcup_{i \in I} f_i\right)^{-1}(B) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(B)$$

je vidět, že je množina $\left(\bigcup \mathcal{F}\right)^{-1}(B)$ otevřená. Proto je zobrazení $\bigcup \mathcal{F}$ spojité. □

Řekneme, že soubor podmnožin $\mathcal{Y} = \langle Y_i \mid i \in I \rangle$ topologického prostoru X je *lokálně konečný* (v X), pokud pro každý bod $x \in X$ existuje okolí U bodu x takové, že množina $\{i \in I \mid U \cap Y_i \neq \emptyset\}$ je konečná. Všimněme si, že je-li soubor $\mathcal{Y}$ lokálně konečný a $J \subseteq I$ a $Z_j \subseteq Y_j$ pro každé $j \in J$, je také soubor $\langle Z_j \mid j \in J \rangle$ lokálně konečný.

Lemma 7.1.2. *Je-li $\mathcal{G} = \langle G_i \mid i \in I\rangle$ lokálně konečný soubor uzavřených podmnožin prostoru X, je $\bigcup \mathcal{G}$ množina uzavřená.*

Důkaz. Položme $G = \bigcup \mathcal{G}$. Stačí ukázat, že pro každé $x \in X \setminus G$ existuje okolí U bodu x disjunktní s G. Podle předpokladu existuje okolí U bodu x takové, že je množina $J := \{i \in I \mid U \cap G_i \neq \emptyset\}$ konečná. Protože je množina J konečná, je sjednocení $\bigcup_{j\in J} G_j$ uzavřené. Proto je $U \setminus \bigcup_{j\in J} G_j = U \setminus G$ okolí x disjunktní s G. □

Lemma 7.1.3. *Nechť X, Y jsou topologické prostory a nechť $\langle G_i \mid i \in I\rangle$ je lokálně konečné uzavřené pokrytí X. Nechť $\mathcal{F} := \langle f_i \colon G_i \to Y \mid i \in I\rangle$ je kompatibilní soubor spojitých zobrazení. Potom je zobrazení $\bigcup \mathcal{F} \colon X \to Y$ spojité.*

Důkaz. Buď H uzavřená podmnožina Y. Pro každé $i \in I$ je $f_i^{-1}(H)$ uzavřená podmnožina G_i a proto také uzavřená podmnožina X. Systém $\left\langle f_i^{-1}(H) \mid i \in I\right\rangle$ je lokálně konečný. Vzhledem k Lemmatu 7.1.2 je množina

$$\left(\bigcup \mathcal{F}\right)^{-1}(H) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(H)$$

uzavřená. Odtud plyne, že je zobrazení $\bigcup \mathcal{F}$ spojité. □

Poznámka. *V důkazu Lemmatu 6.2.1 jsme sestrojili funkci $g \colon \overline{U} \to \mathbb{I}$. Označme $g' \colon X \setminus U \to \mathbb{I}$ konstantní zobrazení na množinu $\{1\}$. Vzhledem k tomu, že $g(\overline{U} \setminus U) = \{1\}$ jsou zobrazení g a g' kompatibilní. Spojitost zobrazení $f = g \cup g'$ potom plyne z Lemmatu 7.1.3.*

Lemma 7.1.4. *Nechť A je otevřená podmnožina a $\mathcal{G}$ je množina uzavřených podmnožin kompaktního prostoru K. Pokud $\bigcap \mathcal{G} \subseteq A$, existuje konečná $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ taková, že $\bigcap \mathcal{F} \subseteq A$.*

Důkaz. Množina $K \setminus A$ je uzavřenou podmnožinou kompaktního prostoru K a proto je kompaktní. Pro spor předpokládejme, že $\bigcap \mathcal{F} \nsubseteq A$ pro každou konečnou neprázdnou $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Potom má množina $\mathcal{G}' := \{G \setminus A \mid G \in \mathcal{G}\}$ uzavřených podmnožin $K \setminus A$ konečnou průnikovou vlastnost. Z kompaktnosti podprostoru $K \setminus A$ plyne, že $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. To je ve sporu s předpokladem, že $\bigcap \mathcal{G} \subseteq A$. □

V příští podkapitole použijeme následující větu.

Věta 7.1.5. *Nechť D je hustý podprostor topologického prostoru X a $f \colon D \to K$ spojité zobrazení do kompaktního prostoru K. Potom lze f spojitě rozšířit na zobrazení $X \to K$ právě když pro každou dvojici G_1, G_2 uzavřených podmnožin prostoru K platí, že*

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset \implies \overline{f^{-1}(G_1)} \cap \overline{f^{-1}(G_2)} = \emptyset. \tag{10}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že existuje spojité rozšíření $F \colon X \to K$ zobrazení f. Nechť G_1, G_2 jsou disjunktní uzavřené podmnožiny prostoru

K. Protože je zobrazení F spojité, platí, že $F^{-1}(G_i) = \overline{F^{-1}(G_i)}$, $i = 1, 2$. Z disjunktnosti množin G_1 a G_2 plyne, že

$$\overline{F^{-1}(G_1)} \cap \overline{F^{-1}(G_2)} = F^{-1}(G_1) \cap F^{-1}(G_2) = \emptyset.$$

Odtud plyne, že

$$\overline{f^{-1}(G_1)} \cap \overline{f^{-1}(G_2)} \subseteq \overline{F^{-1}(G_1)} \cap \overline{F^{-1}(G_2)} = \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že implikace (10) platí pro každou dvojici G_1, G_2 uzavřených podmnožin K. Pro každý bod $x \in X$ označme symbolem $\mathcal{B}(x)$ množinu všech jeho okolí a položme

$$\mathcal{F}(x) := \left\{ \overline{f(D \cap U)} \mid U \in \mathcal{B}(x) \right\}.$$

Všimněme si, že je množina všech okolí bodu x uzavřena na konečné průniky. Proto pro každé $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}(x)$ platí, že

$$\emptyset \neq \overline{f\Big(D \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big)} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f\,(D \cap U_i)}.$$

Odtud je plyne, že má množina $\mathcal{F}(x)$ konečnou průnikovou vlastnost. Z kompaktnosti prostoru K pak dostaneme, že $\bigcap \mathcal{F}(x) \neq \emptyset$.

Pomocné tvrzení 1. $|\bigcap \mathcal{F}(x)| = 1$.

Důkaz. Ukázali jsme, že je průnik $\bigcap \mathcal{F}(x)$ neprázdný. Pro spor předpokládejme, že existují $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in \bigcap \mathcal{F}(x)$. Protože je prostor K kompaktní a proto normální[1] (cf. Věta 3.2.4), existují disjunktní uzavřená okolí G_1, G_2 bodů y_1, y_2, po řadě. Z předpokladu (10) plyne, že

$$\overline{f^{-1}(G_1)} \cap \overline{f^{-1}(G_2)} = \emptyset.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $x \notin \overline{f^{-1}(G_1)}$. Všimněme si, že $X \setminus \overline{f^{-1}(G_1)}$ je otevřené okolí bodu x a proto $X \setminus \overline{f^{-1}(G_1)} \in \mathcal{B}(x)$. Odtud plyne, že

$$y_1 \in \bigcap \mathcal{F}(x) \subseteq \overline{f\left(D \cap \left(X \setminus \overline{f^{-1}(G_1)}\right)\right)} = \overline{f\left(D \setminus \overline{f^{-1}(G_1)}\right)}.$$

Současně platí, že $G_1 \cap f\left(D \setminus \overline{f^{-1}(G_1)}\right) = \emptyset$. To je ve sporu s tím, že G_1 je okolí bodu y_1. $\boxtimes$

Definujeme zobrazení $F \colon X \to K$ tak, že $F(x) \in \bigcap \mathcal{F}(x)$. Vzhledem k Pomocnému tvrzení 1 je zobrazení F jednoznačně definováno. Pro každé $x \in D$ platí, že $f(x) = \bigcap \mathcal{F}(x)$ a proto $F \restriction D = f$. Zbývá ukázat, že je zobrazení $F \colon X \to K$ spojité.

Nechť $x \in X$ a V je otevřené okolí bodu $F(x)$ v K. Platí, že

$$F(x) \in \bigcap_{U \in \mathcal{B}(x)} \overline{f(D \cap U)} \subseteq V.$$

[1] k důkazu nám postačí, že je T_3

Z Lemmatu 7.1.4 plyne, že existují okolí $U_1, \dots, U_n$ bodu x taková, že

$$\overline{f\Big(D \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big)} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(D \cap U_i)} \subseteq V.$$

Symbolem U označme vnitřek průniku $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Potom je U otevřeným okolím bodu x a je-li $y \in U$ je U okolím y. Proto platí, že $F(y) \in \overline{f(D \cap U)} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(D \cap U_i)} \subseteq V$. Je tedy $F(U) \subseteq V$. Odtud je vidět, že je zobrazení $F\colon X \to K$ spojité. □

7.2. Kompaktifikace

Definice. *Kompaktifikace* topologického prostoru X je homeomorfní vnoření $c\colon X \to K$ do kompaktního prostoru K takové, že $\overline{c(X)} = K$, tj., homeomorfní vnoření X do kompaktního prostoru jehož obraz je v tomto prostoru hustý. Prostor K budeme obvykle značit cX.

Vzhledem Lemmatu 5.3.3 má topologický prostor X kompaktifikaci právě když je možné jej homeomorfně vnořit do kompaktního prostoru. Podle Věty 5.3.4 to lze právě když je prostor X Tichonovův. Symbolem $\boldsymbol{C}(X)$ označíme množinu všech kompaktifikací Tichonovova prostoru X. Na množině $\boldsymbol{C}(X)$ definujeme binární relaci $\leq$ takto: Nechť $c_i\colon X \to c_iX$, $i = 1, 2$ je dvojice kompaktifikací prostoru X. Potom platí, že $c_2 \leq c_1$ pokud existuje spojité zobrazení $f\colon c_1X \to c_2X$ takové, že diagram

$$\begin{array}{ccc} X & = & X \\ {\scriptstyle c_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_2} \\ c_1X & \xrightarrow[f]{} & c_2X \end{array}$$

komutuje, tj., že platí rovnost $fc_1 = c_2$.

Lemma 7.2.1. *Nechť c_1 a c_2 jsou kompaktifikace prostoru X a $f\colon c_1X \to c_2X$ je spojité zobrazení takové, že $fc_1 = c_2$. Takové zobrazení je určeno jednoznačně a platí, že $c_2X = f(c_1X)$ (tj., zobrazení f je na).*

Důkaz. Jednoznačnost spojitého zobrazení $f\colon c_1X \to c_2X$ takového, že $fc_1 = c_2$ plyne z Lemmatu 6.1.2, neboť obraz $c_1(X)$ je hustý v c_1X. Rovnost $c_2X = f(c_1X)$ také snadno nahlédneme. □

Snadno nahlédneme, že relace $\leq$ je na množině $\boldsymbol{C}(X)$ tranzitivní a reflexivní. Řekneme, že kompaktifikace c_1 a c_2 jsou ekvivalentní, což značíme $c_1 \sim c_2$, pokud $c_1 \leq c_2 \leq c_1$.

Tvrzení 7.2.2. *Kompaktifikace c_1 a c_2 Tichonovova prostoru X jsou ekvivalentní právě když existuje homeomorfismus $h\colon c_1X \to c_2X$ takový, že $hc_1 = c_2$.*

Důkaz. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že existuje homeomorfismus $h\colon c_1X \to c_2X$ takový, že $hc_1 = c_2$. Pak podle definice $c_2 \leq c_1$. Označme $h^{-1}\colon c_2X \to c_1X$ jeho inverzi. Potom platí, že $h^{-1}c_2 = h^{-1}hc_1 = c_1$ a proto také $c_1 \leq c_2$. Odtud je vidět, že jsou kompaktifikace c_1 a c_2 ekvivalentní. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že existují spojitá zobrazení $f\colon c_1X \to c_2X$ a $g\colon c_2X \to c_1X$ taková, že $fc_1 = c_2$ a $gc_2 = c_1$. Potom platí, že $gfc_1 = c_1$ a $gfc_2 = c_2$. Z jednoznačnosti takových zobrazení podle předchozího Lemmatu 7.2.1 plyne, že $gf = \mathbf{1}_{c_1X}$ a $fg = \mathbf{1}_{c_2X}$. Odtud plyne, že f a g jsou vzájemně inverzními homomorfismy. Situace je znázorněna v následujícím komutativním diagramu:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c_1"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c_2"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c_1"'] & X \arrow[d, "c_2"] \\
c_1X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{1}_{c_1X}"'] & c_2X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{1}_{c_2X}"'] & c_1X \arrow[r, "f"] & c_2X
\end{tikzcd}$$

□

Symbolem $\boldsymbol{C}_{\sim}(X)$ označíme množinu všech rozkladových tříd ekvivalence $\sim$ a $c/_{\sim}$ bude značit rozkladovou třídu kompaktifikace c. Je zřejmé, že množina $\boldsymbol{C}_{\sim}(X)$ je uspořádána relací $\leq$.

Lemma 7.2.3. *Pro kompaktifikace c_1 a c_2 prostoru X platí, že $c_2 \leq c_1$ právě když pro každou dvojici G, H uzavřených podmnožin prostoru X platí, že*

$$\overline{c_2(G)} \cap \overline{c_2(H)} = \emptyset \implies \overline{c_1(G)} \cap \overline{c_1(H)} = \emptyset \tag{11}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $c_2 \leq c_1$. Potom existuje spojité zobrazení $f\colon c_1X \to c_2X$ takové, že $f \circ c_1 = c_2$. Ze spojitosti zobrazení f plyne, že

$$\begin{aligned} f(\overline{c_1(G)} \cap \overline{c_1(H)}) &\subseteq \overline{f(c_1(G) \cap c_1(H))} \subseteq \overline{fc_1(G)} \cap \overline{fc_1(H)} \\ &= \overline{c_2(G)} \cap \overline{c_2(H)}. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že platí (11). ($\Leftarrow$) Předpokládejme platnost implikace (11).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c_1"'] & X \arrow[dd, "c_2"] \\
c_1(X) \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, dotted, "f'"] & \\
c_1X \arrow[r, "f"'] & c_2X
\end{tikzcd}$$

Nejprve definujme zobrazení $f'\colon c_1(X) \to c_2X$ předpisem $c_1(x) \mapsto c_2(x)$ pro každé $x \in X$. Nechť G', H' jsou disjunktní uzavřené podmnožiny prostoru c_2X. Potom jsou $G := c_2^{-1}(G')$ a $H := c_2^{-1}(H')$ disjunktní uzavřené podmnožiny X. Protože jsou množiny G' a H' uzavřené, platí, že $\overline{c_2(G)} \subseteq G'$ a

$\overline{c_2(H)} \subseteq H'$. Proto platí, že $\overline{c_2(G)} \cap \overline{c_2(H)} = \emptyset$. Vzhledem k (11) odtud plyne, že $\overline{c_1(G)} \cap \overline{c_1(H)} = \emptyset$. Proto jsou množiny $\overline{f'^{-1}(G')} = \overline{c_1(c_2^{-1}(G'))} = \overline{c_1(G)}$ a $\overline{f'^{-1}(H')} = \overline{c_1(c_2^{-1}(H'))} = \overline{c_1(H)}$ disjunktní. Podle Věty 7.1.5 lze zobrazení $f' \colon c_1(X) \to c_2X$ rozšířit na spojité zobrazení $f \colon c_1X \to c_2X$. Snadno nahlédneme, že $fc_1 = f'c_1 = c_2$. Odtud plyne, že $c_2 \leq c_1$. □

Vzhledem k Tvrzení 7.2.2 platí, že

Důsledek 7.2.4. *Kompaktifikace c_1 a c_2 prostoru X jsou ekvivalentní právě když pro každou dvojici G, H uzavřených podmnožin prostoru X platí, že*

$$\overline{c_2(G)} \cap \overline{c_2(H)} = \emptyset \iff \overline{c_1(G)} \cap \overline{c_1(H)} = \emptyset$$

Lemma 7.2.5. *Buď D hustá podmnožina Hausdorffova prostoru X a nechť $f \colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Je-li restrikce $f \restriction D : D \to f(D)$ homeomorfismus, jsou množiny $f(X \setminus D)$ a $f(D)$ disjunktní.*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $x \in X \setminus D$ takový, že $f(x) \in f(D)$. Bez újmy na obecnosti můžeme navíc předpokládat, že $X = D \cup \{x\}$ a $Y = f(D)$. Existuje $y \in D$ takový, že $f(x) = f(y)$. Protože je prostor X Hausdorffův existují disjunktní otevřená okolí $x \in U$ a $y \in V$ bodů x a y. Protože je $f \restriction D$ homeomorfimus, je $f(D \setminus V) = Y \setminus f(V)$ uzavřená podmnožina prostoru Y. Protože $f(x) = f(y) \in f(V)$, plyne ze spojitosti zobrazení $f \colon X \to Y$, že je $f^{-1}(Y \setminus f(V)) = f^{-1}(f(D \setminus V)) = D \setminus V$ uzavřená podmnožina prostoru X. Množina D je hustá v X a proto $x \in \overline{D} = \overline{V} \cup \overline{D \setminus V} = \overline{V} \cup (D \setminus V)$. Protože $x \notin D$, je nutně $x \in \overline{V}$. To vede ke sporu, neboť existuje okolí U bodu x disjunktní s V. □

Z Lemmat 7.2.1 a 7.2.5 plyne, že

Lemma 7.2.6. *Buď X Tichonovův prostor. Jsou-li c_1 a c_2 kompaktifikace prostoru X a $f \colon c_1X \to c_2X$ spojité zobrazení takové, že $fc_1 = c_2$, platí, že*

$$f(c_1(X)) = c_2(X) \quad a \qquad f(c_1X \setminus c_1(X)) = c_2X \setminus c_2(X).$$

Vlastnosti prostoru X často souvisí s vlastnostmi doplňku $cX \setminus c(X)$ obrazu tohoto prostoru v nějaké jeho kompaktifikaci. Příkladem je následující lemma.

Věta 7.2.7. *Pro Tichonovův prostor X je ekvivalentní:*

(1) *Prostor X je lokálně kompaktní.*
(2) *Pro každou kompaktifikaci $c \colon X \to cX$ je $cX \setminus c(X)$ uzavřeným podprostorem cX.*
(3) *Existuje kompaktifikace $c \colon X \to cX$ taková, že $cX \setminus c(X)$ je uzavřeným podprostorem cX.*

Důkaz. Implikace ($2 \Rightarrow 3$) je zřejmá. Implikace ($3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$) plynou z Věty 6.2.5. □

KAPITOLA 8

(A) Čechova-Stoneova a Alexandrova kompaktifikace

ABSTRAKT. *Ukážeme, že každá neprázdná množina kompaktifikací Tichonovova prostoru X má největší prvek vzhledem k předuspořádání množiny $\boldsymbol{C}(X)$. Největší ze všech kompaktifikací Tichonovova prostoru budeme značit βX a nazývat Čechova-Stoneova kompaktifikace. Dále ukážeme, že předuspořádaná množina $\boldsymbol{C}(X)$ má nejmenší prvek právě když je prostor X lokálně kompaktní. Tato nejmenší kompaktifikace odpovídá jednobodové kompaktifikaci. Tato kompaktifikace se nazývá Alexandrova.*

8.1. Uspořádání v $\boldsymbol{C}_{\sim}(X)$ a Čechova-Stoneova kompaktifikace

Připomeňme, že uspořádaná množina C je *úplným svazem*, jestliže má každá podmnožina C supremum a infimum. Každý neprázdný úplný svaz má nejmenší a největší prvek, neboť nejvěší prvek úplného svazu C je roven $\sup C = \inf \emptyset$ a nejmenší prvek tohoto svazu je roven $\inf C = \sup \emptyset$. Také si všimněme, že uspořádaná množina C je úplným svazem právě když má každá podmnožina C supremum. Pro každou podmnožinu $D \subseteq C$ platí totiž rovnost $\inf D = \sup \{c \in C \mid \forall\, d \in D \colon d \leq c\}$.

Již dříve jsme ukázali, že je množina $\boldsymbol{C}_{\sim}(X)$ uspořádaná relací $\leq$.

LEMMA 8.1.1. *Každá neprázdná podmnožina $\boldsymbol{C}_{\sim}(X)$ má supremum vzhledem k uspořádaní $\leq$.*

DŮKAZ. Buď $\boldsymbol{C} := \langle c_i \mid i \in I\rangle$ soubor kompaktifikací. Uvažme zobrazení $c := \Delta_{i\in I} c_i = X \to \prod_{i\in I} c_i X$. Z vlastností kartézského součinu plyne, že je zobrazení c spojité. Dále označme $p_i \colon \prod_{i\in I} c_i X \to c_i X$, $i \in I$, kanonické projekce na jednotlivé souřadnice kartézského součinu. Protože jsou $c_i \colon X \to c_i X$ kompaktifikace, jsou to homeomorfní vnoření. Protože $c_i = p_i c$ pro každé $i \in I$, odděluje zobrazení c body a uzavřené množiny. Podle Lemmatu 5.2.5 je $c \colon X \to \prod_{i\in I} c_i X$ homeomorfní vnoření. Položme $cX = \overline{c(X)} \subseteq \prod_{i\in I} c_i X$. Potom je $c(X)$ hustou podmnožinou cX a proto je $c \colon X \to cX$ kompaktifikací prostoru X.

Pro každé $i \in I$ je $p_i \restriction cX \colon cX \to c_iX$ spojité zobrazení takové, že $c_i = (p_i \restriction cX) \circ c = p_i c$ a proto je $c_i \le c$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"] & X \arrow[d, "c_i"] \\
cX \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rr, bend right, "p_i \restriction cX"'] & \prod_{i \in I} c_i X \arrow[r, "p_i"] & c_i X
\end{tikzcd}.$$

Je-li $c' \colon X \to c'X$ kompaktifikace taková, že pro každé $i \in I$ existuje spojité zobrazení $f_i \colon X \to c_iX$ takové, že $f_i c' = c_i$, potom podle Věty 5.2.2 existuje (jednoznačně určené) spojité zobrazení $\delta \colon c'X \to \prod_{i \in I} c_iX$ takové, že $f_i = p_i \circ \delta$ pro každé $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, equal] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, equal] & \\
X \arrow[d, "c"'] & c'X \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "f_i"] & X \arrow[d, "c_i"] \\
\prod_{i \in I} c_i X \arrow[rr, "p_i"'] & & c_i X
\end{tikzcd}.$$

Pro každé $i \in I$ platí, že

$$p_i c = c_i = f_i c' = p_i \delta c'.$$

Z Věty 5.2.2 (jednoznačnosti zobrazení $\delta_{\mathcal{G}}$) plyne, že $c = \delta c'$. Vzhledem ke spojitosti zobrazení δ, je

$$\delta(c'X) = \delta\overline{c'(X)} \subseteq \overline{\delta c'(X)} = \overline{c(X)} = cX.$$

Proto je δ spojité zobrazení z $c'X$ do cX a platí, že $c = \delta c'$. Odtud je vidět, že $c \le c'$. Ukázali jsme tak, že $c/_\sim = \sup\{c_i/_\sim \mid i \in I\}$. $\square$

Z Lemmatu 8.1.1 mimo jiné plyne, že pro každý Tichonovův prostor X existuje největší kompaktifikace tohoto prostoru. Tato kompaktifikace se nazývá *Čechova-Stoneova* kompaktifikace a obvykle se značí $\beta \colon X \to \beta X$.

8.2. Alexandrova kompaktifikace

Kompaktifikace $\omega \colon X \to \omega X$ Tichonovova prostoru je *jednobodová* (nebo také *Alexandrova*) pokud je $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$.

Lemma 8.2.1. *Nekompaktní topologický prostor má jednobodovou kompaktifikaci právě když je lokálně kompaktní.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že topologický prostor X má jednobodovou kompaktifikaci $\omega \colon X \to \omega X$. Potom $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$ a tedy $|\omega X \setminus \omega(X)| = 1$ je množina uzavřená, neboť prostor X je nutně Tichonovův a tím spíše T_1. Vzhledem k Větě 7.2.7 je prostor X lokálně kompaktní. ($\Leftarrow$).

Předpokládejme, že topologický prostor (X, τ) je lokálně kompaktní a není kompaktní. Buď $\Omega \notin X$ a položme $\omega X = \{\Omega\} \cup X$. Snadno nahlédneme, že

$$\omega\tau := \tau \cup \{\{\Omega\} \cup (X \setminus G) \mid G \text{ je kompaktní podmnožina } X\}$$

je topologií na množině ωX (kompaktní podmnožiny jsou totiž uzavřeny na konečná sjednocení a libovolné průniky). Protože je prostor X lokálně kompaktní, existuje pro každé $x \in X$ kompaktní okolí tohoto bodu. Odtud je vidět, že je prostor $(\omega X, \omega\tau)$ Hausdorffův. Podle předpokladu není prostor X kompaktní, odkud plyne, že Ω není izolovaným bodem prostoru ωX (tj., že jednoprvková množina $\{\Omega\}$ není otevřená). Proto X tvoří hustou podmnožinu prostoru ωX. Zbývá ukázat, že je prostor ωX kompaktní. Buď $\mathcal{G}$ množina uzavřených podmnožin prostoru ωX s konečnou průnikovou vlastností. Je-li $\Omega \in G$ pro všechny $G \in \mathcal{G}$, má množina $\mathcal{G}$ jistě neprázdný průnik. V opačném případě existuje $F \in \mathcal{G}$ taková, že $\Omega \notin F$. Z definice topologie $\omega\tau$ plyne, že je množina F kompaktní. Potom je $\mathcal{F} := \{F \cap G \mid G \in \mathcal{G}\}$ množina uzavřených podmnožin F s konečnou průnikovou vlastností. Protože je F kompaktní je průnik $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{G}$ neprázdný. □

Lemma 8.2.2. *Buď X lokálně kompaktní topologický prostor. Potom je $\omega/_\sim$ nejmenším prvkem $\boldsymbol{C}_\sim(X)$.*

Důkaz. Buď $c\colon X \to cX$ libovolná kompaktifikace prostoru X. Ukážeme, že existuje spojité zobrazení $f\colon cX \to \omega X$ takové, že diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[d, "\omega"] \\ cX \arrow[r, "f"'] & \omega X \end{tikzcd}$$

komutuje. Položme $f(c(x)) = \omega(x)$ pro všechna $x \in X$ a $f(y) = \Omega$ pro všechna $y \in cX \setminus c(X)$. Z definice zobrazení f je vidět, že $fc = \omega$. Ukážeme, že je zobrazení f spojité. Buď A otevřená podmnožina ωX. Pokud $\Omega \notin A$, je A otevřenou podmnožinou $\omega(X)$. Odtud plyne, že $f^{-1}(A)$ je otevřená podmnožina $c(X)$. Protože je prostor X lokálně kompaktní, je podle Věty 7.2.7 množina $cX \setminus c(X)$ uzavřená v cX a tedy $c(X)$ je otevřená. Odtud plyne, že je $f^{-1}(A)$ otevřenou podmnožinou cX. Pokud $\Omega \in A$, je $\omega X \setminus A$ kompaktní podmnožinou $\omega(X)$. Odtud plyne, že je $f^{-1}(\omega X \setminus A) = cX \setminus f^{-1}(A)$ kompaktní a tedy uzavřenou podmnožinou cX. Proto je i v tomto případě množina $f^{-1}(A)$ otevřená. □

Lemma 8.2.3. *Buď $c\colon X \to cX$ kompaktifikace topologického prostoru X. Je-li $c/_\sim$ nejmenším prvkem $\boldsymbol{C}_\sim(X)$, je kompaktifikace c jednobodová.*

Důkaz. Předpokládejme, že existují dva různé body $y_1, y_2 \in cX \setminus c(X)$. Položme $Y := cX \setminus \{y_1, y_2\}$. Inkluze $Y \hookrightarrow cX$ je kompaktifikací prostoru Y (všimněme si, že $c(X) \subseteq cX \setminus \{y_1, y_2\} = Y$ je hustá podmnožina prostoru cX). Protože je množina $\{y_1, y_2\}$ konečná, je v kompaktním prostoru cX uzavřená. Podle Věty 7.2.7 je prostor Y lokálně kompaktní. Protože je

$Y \subsetneq cX$ hustou podmnožinou, není v cX uzavřený a proto nemůže být kompaktní. Vzhledem k Lemmatu 8.2.1 existuje jednobodová kompaktifikace $\omega\colon Y \to \omega Y$ prostoru Y. Protože je $c(X)$ hustou podmnožinou cX je hustou podmnožinou také podprostoru Y. Odtud plyne, že je $\omega c(X)$ hustou podmnožinou ωY. Proto je $\omega c\colon X \to \omega Y$ kompaktifikací X. Vzhledem k Lemmatu 8.2.2 je ωY minimální kompaktifikace prostoru Y. Proto existuje spojité zobrazení $f\colon cX \to \omega Y$ takové, že diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, equal] \arrow[d, "\subseteq"'] & Y \arrow[d, "\omega"] \\ cX \arrow[r, "f"'] & \omega Y \end{tikzcd}$$

komutuje. Potom komutuje také diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[d, "\omega c"] \\ cX \arrow[r, "f"'] & \omega Y. \end{tikzcd}$$

Vzhledem k minimalitě rozkladové třídy $c/_\sim$ a Tvrzení 7.2.2 je f homeomorfismus. To vede ke sporu neboť $f(y_1) = f(y_2) = \Omega$ právě ten jediný bod v $\omega Y \setminus \omega(Y)$. $\square$

Shrňme si vlastnosti uspořádané množiny $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ Tichonovova prostoru X. Podle Lemmatu 8.1.1 má každá neprázdná podmnožina $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ supremum. Největší prvek množiny $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ nazýváme Čechovou-Stoneovou kompaktifikací a značíme ji $\beta\colon X \to \beta X$. Následující je ekvivalentní:

(1) Uspořádaná množina $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ je úplný svaz;
(2) Uspořádaná množina $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ má nejmenší prvek;
(3) Prostor X má jednobodovou kompaktifikaci $\omega\colon x \to \omega X$.
(4) Prostor X je lokálně kompaktní.

V případě, že jsou splněny tyto podmínky je minimálním prvkem $\boldsymbol{C}_\sim(X)$ rozkladová třída jednobodové kompaktifikace prostoru X.

Část 2

Teorie kategorií

KAPITOLA 8

(B) Kategorie a funktory

Abstrakt. *Definujeme kategorie a funktory a tyto pojmy demonstrujeme na jednoduchých příkladech.*

8.3. Kategorie

Kategorie $\mathbf{A}$ sestává z objektů a morfismů.

- Třídu všech objektů kategorie $\mathbf{A}$ budeme značit $\operatorname{obj}(\mathbf{A})$.
- Třídu všech morfismů kategorie $\mathbf{A}$ budeme značit $\operatorname{mor}(\mathbf{A})$.

Každému morfismu f přiřadíme dvojici objektů $\operatorname{dom} f$ a $\operatorname{cod} f$; intuitivně objekt z a objekt do kterého daný morfismus vede. Morfismus často znázorňujeme šipkou jako na následujícím obrázku:

$$\operatorname{dom} f \xrightarrow{f} \operatorname{cod} f.$$

Značení $f\colon a \to b$ tedy znamená, že f je morfismus, $a = \operatorname{dom} f$ a $b = \operatorname{cod} f$.

Na morfismech kategorie $\operatorname{mor}(\mathbf{A})$ je definována parciální operace skládání, kterou zapisujeme podobně jako zobrazení zprava doleva. Morfismy f a g lze složit (v pořadí $g \circ f$) tehdy a jen tehdy když $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$. Platí, že

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f \quad \text{a} \quad \operatorname{cod}(g \circ f) = \operatorname{cod} g.$$

Parciální operace skládání morfismů je asociativní. To znamená, že pokud f, g, h jsou morfismy takové, že $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ a současně $\operatorname{cod} g = \operatorname{dom} h$, potom platí rovnost

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Pro každý objekt $a \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ existuje právě jeden morfismus, který budeme značit 1_a a nazývat *identitou* na a takový, že

$$\operatorname{dom} 1_a = \operatorname{cod} 1_a \quad \text{a} \quad g \circ 1_a = g \quad \text{a} \quad 1_a \circ f = f,$$

pro všechny morfismy f, g takové, že $a = \operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$.

Příklad 8.3.1. *Uveďme si několik příkladů kategorií:*

- *Kategorie* **Set**. *Objekty této kategorie jsou množiny a morfismy zobrazení mezi těmito množinami. Jsou-li A, B množiny a $f\colon A \to B$ zobrazení, je $A = \operatorname{dom} f$ a $B = \operatorname{cod} f$. Identitou na množině A je identické zobrazení $A \to A$.*

- *Algebraické struktury dané signatury a daných vlastností určují kategorie. Uveďme například kategorii* **Grp** *všech grup. Objekty této kategorie jsou grupy a morfismy jsou grupové homomorfismy.*
- *Topologické prostory tvoří kategorii* **Top**. *Objekty této kategorie jsou topologické prostory a morfismy jsou spojitá zobrazení.*

8.4. Funktory

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou kategorie. *Funktor* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (z kategorie $\mathbf{A}$ do kategorie $\mathbf{B}$) sestává z dvojice zobrazení $\operatorname{obj}(\mathbf{A}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{B})$ a $\operatorname{mor}(\mathbf{A}) \to \operatorname{mor}(\mathbf{B})$ takových, že

- $\operatorname{dom} F(f) = F(\operatorname{dom} f)$ a $\operatorname{cod} F(f) = F(\operatorname{cod} f)$, pro každý morfismus $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{A})$;
- $F(gf) = F(g)F(f)$ pro každou dvojici morfismů $f, g \in \operatorname{mor}(\mathbf{A})$ takových, že $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ (všimněme si, že vzhledem k první podmínce potom platí, že $\operatorname{dom} F(g) = \operatorname{cod} F(f)$ a tedy lze morfismy $F(f)$ a $F(g)$ skládat);
- $F(1_a) = 1_{F(a)}$, pro každý objekt $a \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$.

(Obraz objektu $a \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ značíme $F(a)$ a podobně značíme $F(f)$ obraz morfismu $f \in \operatorname{mor}(\mathbf{A})$.)

Příklad 8.4.1. *Uveďme si jednoduché příklady funktorů:*

- *Funktor* $P\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, *definovaný takto:*
  - $P(A)$ *je množina všech podmnožin množiny* A;
  - *Je-li* $f\colon A \to B$ *zobrazení, je* $P(f)\colon P(A) \to P(B)$ *definováno předpisem*
  $$X \mapsto \{f(x) \mid x \in X\}, \quad \text{pro každou } X \subseteq A.$$

  Snadno ověříme, že P *splňuje podmínky kladené na funktor.*
- *Označme* **AbR** *kategorii komutativních okruhů. Objekty této kategorie jsou komutativní okruhy a morfismy jsou okruhové homomorfismy. Buď* n *přirozené číslo. Každému komutativnímu okuhu* K *přiřaďme grupu* $\mathrm{GL}_n(K)$ *všech regulárních* $n \times n$ *matic nad tímto okruhem. Okruhový homomorfismus* $f\colon K \to L$ *indukuje grupový homomorfismus* $\mathrm{GL}_n(f)\colon \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(L)$ *daný předpisem*
  $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(a_{11}) & f(a_{12}) & \cdots & f(a_{1n}) \\ f(a_{21}) & f(a_{22}) & \cdots & f(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(a_{n1}) & f(a_{n2}) & \cdots & f(a_{nn}) \end{pmatrix}$$
  Definujeme tak funktor $\mathrm{GL}_n\colon \mathbf{AbR} \to \mathbf{Grp}$.
- *Zapomínajícím funktorem* *budeme rozumět funktor, který vyjme některé ze struktur (resp. operací) definovaných na objektech výchozí katogorie. Příkladem je funktor* $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, *který přiřadí grupě* G *její univerzum (tj. množinu* G*) a grupovému homomorfismu* $f\colon G \to H$ *příslušné zobrazení univerz.*

Jiný příklad získáme takto: Označme **Rng** *kategorii okruhů a* **AbG** *kategorii Abelových grup. Příkladem zapomínajícího funktoru je funktor* $U\colon \mathbf{Rng} \to \mathbf{AbG}$*, který přiřadí okruhu* R *Abelovu grupu* $(R, +)$ *(získanou redukcí okruhu* R *na strukturu s operací sčítání) a okruhovému homomorfismu příslušný homomorfismus Abelových grup.*

Definice. Buď $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funktor.

- Řekneme, že funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je *věrný* pokud pro každou dvojici morfismů $f, g \in \operatorname{mor}(\mathbf{A})$ takových, že $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ a $\operatorname{cod} f = \operatorname{cod} g$ platí, že
$$F(f) = F(g) \implies f = g.$$
- Řekneme, že funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je *úplný* pokud pro každou dvojici objektů $a, b \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ a každý morfismus $g\colon F(a) \to F(b)$ existuje morfismus $f\colon a \to b$ takový, že $F(f) = g$.

Pro dvojici objektů a, b kategorie $\mathbf{A}$ budeme symbolem $\hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ značit množinu všech morfismů f v kategorii $\mathbf{A}$ takových, že $\operatorname{dom} f = a$ a současně $\operatorname{cod} f = b$. Z definic snadno nahlédneme, že $F(\hom_{\mathbf{A}}(a, b)) \subseteq \hom_{\mathbf{B}}(F(a), F(b))$ pro každý funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ a platí, že

- funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je věrný právě když jsou restrikce $F \restriction \hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ prosté pro všechny $a, b \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$.
- funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je úplný právě když jsou restrikce $F \restriction \hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ zobrazeními na pro všechny $a, b \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$.

KAPITOLA 9

Přirozené transformace, ekvivalence a dualita, hom-funktory

ABSTRAKT. *Definujeme různé typy morfismů: izomorfismy, monomorfismy, epimorfismy, štěpitelné monomorfismy a štěpitelné epimorfismy. Zavedeme přirozené transformace funktorů. Ukážeme rozdíl mezi izomorfismy a ekvivalencemi kategorií a definujeme kontravariantní funktory a dualitu kategorií. Nakonec popíšeme kovariantní a kontravariantní* hom*-funktory do kategorie množin.*

9.1. Izomorfismy, monomorfismy a epimorfismy

Budeme pracovat v (libovolné fixní) kategorii $\mathbf{A}$. Morfismus $f\colon a \to b$ je *izomorfismus* pokud existuje morfismus $g\colon b \to a$ takový, že

$$gf = 1_a \quad \text{a zároveň} \quad fg = 1_b. \tag{12}$$

Morfismus g je vlastnostmi (12) určen jednoznačně. Jsou-li totiž morfismy $g', g''\colon b \to a$ takové, že $g'f = 1_a$ a $fg'' = 1_b$, platí, že

$$g' = g'1_b = g'fg'' = 1_a g'' = g''.$$

Jednoznačně určený morfismus g splňující (12) budeme značit f^{-1} a nazývat *inverzí* k f. Všimněme si, že složení izomorfismů je opět izomorfismus. Platí totiž rovnost $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Morfismus $f\colon a \to b$ je *mono(morfismus)* pokud pro každou dvojici morfismů $g, h\colon a' \to a$ plyne z rovnosti $fg = fh$ rovnost $g = h$. To znamená, že morfismus f je monomorfismus právě když jím lze krátit zleva. Morfismus $f\colon a \to b$ je *štěpitelný monomorfismus* pokud existuje morfismus $g\colon b \to a$ takový, že $gf = 1_a$, tj., pokud má levou inverzi. Snadno nahlédneme, že štěpiteným monomorfismem lze krátit zleva a tedy, že každý štěpitelný monomorfismus je nutně monomorfismem. Naopak neplatí, že každý mnomorfismus je nutně štěpitelný. Například v kategorii grup je inkluze $i\colon \mathbb{A}_3 \to \mathbb{S}_3$ alternativní tříprvkové grupy do symetrické šesti-prvkové grupy monomorfismem, ale není to štěpitelný monomorfismus.

Morfismus $f\colon a \to b$ je *epi(morfismus)* pokud pro každou dvojici morfismů $g, h\colon b \to b'$ plyne z rovnosti $gf = hf$ rovnost $g = h$. To znamená, že morfismus f je epimorfismus právě když jím lze krátit zprava. Morfismus $f\colon a \to b$ je *štěpitelný epimorfismus* pokud existuje morfismus $g\colon a \to b$

takový, že $fg = 1_b$, tj., pokud má pravou inverzi. Podobně jako v předchozím případě je každý štěpitelný epimorfismus epimorfismem, ale ne každý epimorfismus je štěpitelný.

9.2. Přirozené transformace

Nechť $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je dvojice funktorů. *Přirozená transformace* $\tau\colon F \xrightarrow{\bullet} G$, z funktoru F do funktoru G, je soubor $\tau = \langle \tau_a\colon F(a) \to G(a) \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\rangle$ morfismů v kategorii $\mathbf{B}$ takový, že pro každý morfismus $f\colon a \to b$ v kategorii $\mathbf{A}$ je diagram

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_a"'] & F(b) \arrow[d, "\tau_b"] \\ G(a) \arrow[r, "G(f)"'] & G(b) \end{tikzcd}$$

komutativní.

Přirozený izomorfismus je přirozená transformace $\tau\colon F \xrightarrow{\bullet} G$, kde $\tau = \langle \tau_a\colon F(a) \to G(a) \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\rangle$, taková, že τ_a je izomorfismus pro každé $a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})$. V takovém případě můžeme definovat inverzní přirozenou transformaci $\tau^{-1} = \big\langle \tau_a^{-1}\colon G(a) \to F(a) \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\big\rangle : G \xrightarrow{\bullet} F$. Přirozený izomorfismus budeme značit symbolem $\overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}}$. V případě, že existuje přirozený izomorfismus $F \overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}} G$, řekneme, že funktory F a G jsou *přirozeně izomorfní* což značíme jako $F \overset{\bullet}{\simeq} G$.

Příklad 9.2.1. *Buď $n \in \mathbb{N}$ a uvažme funktor $\mathrm{GL}_n\colon \mathbf{AbR} \to \mathbf{Grp}$ z kategorie komutativních okruhů do kategorie grup.*[1] *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každý okruh R je zobrazení $\det_R\colon \mathrm{GL}_k(R) \to \mathrm{GL}_1(R)$, které regulární matici $\boldsymbol{A}$ přiřadí její determinant, homomorfismem grup. Je-li $f\colon R \to S$ okruhový homomorfismus, je diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\mathrm{GL}_n(f)"] \arrow[d, "\det_R"'] & \mathrm{GL}_n(S) \arrow[d, "\det_S"] \\ \mathrm{GL}_1(R) \arrow[r, "\mathrm{GL}_1(f)"'] & \mathrm{GL}_1(S) \end{tikzcd}$$

komutativní. Proto je $\det = \langle \det_R \mid R \in \mathrm{obj}(\mathbf{AbR})\rangle$ přirozenou transformací $\det\colon \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\bullet} \mathrm{GL}_1$. Všimněme si, že funktor GL_1 přiřadí okruhu R grupu jeho invertibilních prvků.

9.3. Podkategorie

Kategorie $\mathbf{A}$ je *podkategorií* kategorie $\mathbf{B}$ jestliže $\mathrm{obj}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{obj}(\mathbf{B})$, pro každou dvojici objektů $a, b \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})$ platí inkluze $\hom_{\mathbf{A}}(a, b) \subseteq \hom_{\mathbf{B}}(a, b)$, identické morfismy v kategorii $\mathbf{B}$ na objektech kategorie $\mathbf{A}$ leží všechny v

[1] $\mathbf{AbR}$ značí kategorii komutativních okruhů a $\mathbf{Grp}$ kategorii grup.

kategorii $\mathbf{A}$ a skládaní morfismů v kategorii $\mathbf{A}$ je restrikcí skládání morfismů v kategorii $\mathbf{B}$.

Definice. Řekneme, že podkategorie $\mathbf{A}$ kategorie $\mathbf{B}$ je *úplná*, pokud pro každou dvojici objektů $a, b \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ platí, že

$$\hom_{\mathbf{A}}(a,b) = \hom_{\mathbf{B}}(a,b).$$

Všimněme si, že $\mathbf{A}$ je úplná podkategorie kategorie $\mathbf{B}$ právě když je inkluze $J_{\mathbf{A},\mathbf{B}}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ úplný funktor, a že inkluze $J_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ je vždy funktor věrný.

9.4. Izomorfismus a ekvivalence kategorií

Symbolem $I_{\mathbf{A}}$ budeme značit identický funktor $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je *izomorfismem kategorií* pokud má inverzi $F^{-1}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, to znamená, pokud existuje funktor $F^{-1}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ takový, že $F \circ F^{-1} = I_{\mathbf{B}}$ a $F^{-1} \circ F = I_{\mathbf{A}}$. Izomorfismy kategorií odpovídají jednotkovým morfismům v kategorii všech kategorií $\mathbf{Cat}$, jejíž objekty jsou kategorie a jejíž morfismy jsou funktory. Snadno nahlédneme, že funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je izomorfismem kategorií právě když je bijekcí na objektech i morfismech.

Ekvivalence kategorií $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sestává z dvojice funktorů

$$\langle F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}, G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A} \rangle$$

takové, že

$$G \circ F \overset{\bullet}{\simeq} I_{\mathbf{A}} \quad \text{a} \quad F \circ G \overset{\bullet}{\simeq} I_{\mathbf{B}}.$$

Příklad 9.4.1. *Na nezáporné celé číslo n pohlížejme jako na n-prvkovou množinu všech jeho nezáporných předchůdců. Tj,*

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad \dots, \quad n := \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \dots$$

Označme $\mathbf{Fin}$ *úplnou podkategorii kategorie* $\mathbf{Set}$ *jejíž objekty jsou právě všechny konečné množiny. Dále označme jako* $\mathbf{N_0}$ *úplnou podkategorii kategorie* $\mathbf{Fin}$ *jejíž objekty jsou nezáporná celá čísla. Jsou-li tedy m, n nezáporná celá čísla, sestává množina $\hom_{\mathbf{N_0}}(m,n)$ ze všech n^m zobrazení $m \to n$.*

Inkluze $J\colon \mathbf{N_0} \to \mathbf{Fin}$ je věrným a úplným funktorem těchto kategorií. Pro konečnou množinu A položme $N(A) := |A|$ (tj., počet prvků množiny A) a zvolme bijekci $\theta_A\colon N(A) \to A$ (tj., nějaké očíslování prvků množiny A). Pro dvojici konečných množin A, B a zobrazení $f\colon A \to B$ položme $N(f) := \theta_B^{-1} \circ f \circ \theta_A$.

Snadno nahlédneme, že je $N\colon \mathbf{Fin} \to \mathbf{N_0}$ funktor a soubor bijekcí $\theta := \langle \theta_A \mid A \in \operatorname{obj}(\mathbf{Fin}) \rangle$ je přirozený izomorfismus $J \circ N \overset{\bullet}{\simeq} I_{\mathbf{Fin}}$. Protože současně platí, že $N \circ J = I_{\mathbf{N_0}}$, jsou kategorie $\mathbf{N_0}$ a $\mathbf{Fin}$ ekvivalentní. Situaci *znázorňuje tento diagram:*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Fin} \arrow[dl, "N"'] \arrow[d, bend right=60, "J\circ N"'] \arrow[d, bend left=60, "I_{\mathbf{Fin}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\bullet}{\simeq}_{\theta}"] \\
\mathbf{N_0} \arrow[r, "J"] \arrow[d, bend right=60, "N\circ J=I_{\mathbf{N_0}}"'] & \mathbf{Fin} \arrow[dl, "N"] \\
\mathbf{N_0} &
\end{tikzcd}
$$

9.5. Opačná kategorie, kontravariantní funktor, dualita

Kategorie *opačná* ke kategorii $\mathbf{A}$ je kategorie $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ definovaná takto:

- $\mathrm{obj}(\mathbf{A}^{\mathrm{op}}) = \{a \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\}$,
- $\mathrm{mor}(\mathbf{A}^{\mathrm{op}}) = \left\{\widehat{f} \mid f \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\right\}$

a platí, že $\mathrm{dom}\,\widehat{f} = \mathrm{cod}\, f$, $\mathrm{cod}\,\widehat{f} = \mathrm{dom}\, f$ a $\widehat{gf} = \widehat{f}\widehat{g}$, pro každé $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ a každé $g \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$ takové, že $\mathrm{dom}\, g = \mathrm{cod}\, f$ (a proto $\mathrm{dom}\,\widehat{g} = \mathrm{cod}\,\widehat{f}$). Kategorii $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ tedy sestrojíme tak, že v kategorii $\mathbf{A}$ obrátíme morfismy.

Definice. Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou kategorie. *Kontravariantní funktor* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sestává z dvojice zobrazení $F\colon\ \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \to \mathrm{obj}(\mathbf{B})$ a $F\colon\ \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \to \mathrm{mor}(\mathbf{B})$ takových, že platí

- $\mathrm{dom}\, F(f) = F(\mathrm{cod}\, f)$ a $\mathrm{cod}\, F(f) = F(\mathrm{dom}\, f)$, pro každý morfismus $f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A})$,
- $F(gf) = F(f)F(g)$ pro každou dvojici f, g ve kategorii $\mathbf{A}$ takovou, že $\mathrm{dom}\, g = \mathrm{cod}\, f$,
- $F(1_a) = 1_{F(a)}$ pro každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$.

Funktor (definovaný v Přednášce 8b) nazýváme také *kovariantní* funktor.[2]

Připomeňme, že pro dvojici objektů a, b kategorie $\mathbf{A}$ jsme definovali

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,b) = \{f \in \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \mid \mathrm{dom}\, f = a \quad \& \quad \mathrm{cod}\, f = b\}\,.$$

Nechť a, b, c jsou objekty kategorie $\mathbf{A}$ a $g\colon b \to c$ morfismus. Položme

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,g)\colon\ \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,b) &\to \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,c) \\ f &\mapsto gf \end{aligned}$$

Takto definujeme (kovariantní) funktor $\mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,-)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$.

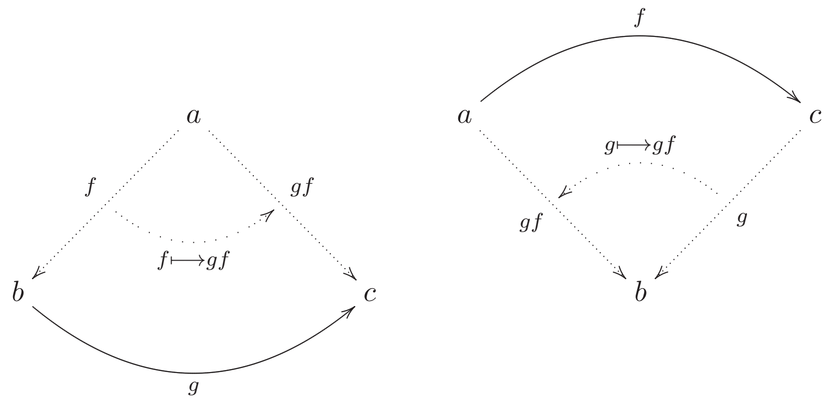
Nechť a, b, c jsou objekty kategorie $\mathbf{A}$ a $f\colon a \to c$ morfismus. Položme

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(f,b)\colon\ \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(c,b) &\to \mathrm{hom}_{\mathbf{A}}(a,b) \\ g &\mapsto gf \end{aligned}$$

[2]Kontravariantní funktor tedy na rozdíl od funktoru kovariantního obrací směr morfismů.

Takto definujeme (kontravariantní) funktor $\hom_{\mathbf{A}}(-,b)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$.

Poznámka. *V případě, že parametry a (resp. b) jsou zřejmé z kontextu se někdy užívá kratší značení $g_* := \hom_{\mathbf{A}}(a,g)$ (resp. $f^* := \hom_{\mathbf{A}}(f,b)$).*



Kovariantní a kontravariantní hom-funktor.

Definice. *Dualita* kategorií $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je dvojice kontravariantních funktorů $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ a $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ taková, že $I_{\mathbf{A}} \stackrel{\bullet}{\simeq} G \circ F$ a $I_{\mathbf{B}} \stackrel{\bullet}{\simeq} F \circ G$.

Příklad 9.5.1. *Buď $\mathbb{T}$ těleso a označme $\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}$ kategorii konečně dimenzionálních $\mathbb{T}$-vektorových prostorů. Uvažme kontravariantní funktor*

$$(-)^* := \hom_{\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}}(-,\mathbb{T})\colon \mathbf{vec}_{\mathbb{T}} \to \mathbf{vec}_{\mathbb{T}},$$

který konečně dimenzionálnímu vektorovému prostoru $\boldsymbol{V}$ přiřadí duální prostor $\boldsymbol{V}^*$ lineárních forem.

Buď $\boldsymbol{V}$ konečně dimenzionální vektorový prostor. Podle definice je prostor $\boldsymbol{V}^{**} = \hom_{\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}}(\boldsymbol{V}^*,\mathbb{T})$ složen z lineárních zobrazení z vektorového prostoru $\boldsymbol{V}^*$ lineárních forem do $\mathbb{T}$. Definujme lineární zobrazení $\delta_{\boldsymbol{V}}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}$ předpisem $\delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v})\colon f \mapsto f(\boldsymbol{v})$, pro každý vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ a každou lineární formu $f \in \boldsymbol{V}^*$.

Snadno nahlédneme, že pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ existuje lineární forma f taková, že $f(\boldsymbol{v}) \neq 0$. Potom platí, že $\delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v})(f) = f(\boldsymbol{v}) \neq 0$. Odtud plyne, že $\delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v}) \neq 0$. Proto je zobrazení $\delta_{\boldsymbol{V}}$ prosté. Protože je prostor $\boldsymbol{V}$ konečně dimenzionální, platí rovnosti $\dim \boldsymbol{V} = \dim \boldsymbol{V}^* = \dim \boldsymbol{V}^{**}$. Odtud plyne, že je každé prosté lineární zobrazení $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^{**}$ izomorfismem. Je-li $\boldsymbol{W}$ konečně dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a $g\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ lineární zobrazení, je diagram

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{V} & \xrightarrow{\delta_{\boldsymbol{V}}} & \boldsymbol{V}^{**} \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^{**}} \\
\boldsymbol{W} & \xrightarrow[\delta_{\boldsymbol{W}}]{} & \boldsymbol{W}^{**}.
\end{array}$$

komutativní; pro každý vektor $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *a každou lineární formu* $h \in \boldsymbol{W}^*$ *totiž platí rovnost*

$$\begin{aligned} g^{**}(\delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v}))(h) &= \delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v})(g^*(h)) = \delta_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{v})(h \circ g) = h(g(\boldsymbol{v})) \\ &= \delta_{\boldsymbol{W}}(g(\boldsymbol{v}))(h) = (\delta_{\boldsymbol{W}} \circ g)(\boldsymbol{v})(h). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že je soubor $\delta := \langle \delta_{\boldsymbol{V}} \mid \boldsymbol{V} \in \mathbf{vec}_{\mathbb{T}} \rangle$ *je přirozeným izomorfismem* $I_{\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}} \stackrel{\bullet}{\simeq} (-)^{**}$*. Proto je dvojice kopií funktoru* $(-)^*\colon \mathbf{vec}_{\mathbb{T}} \to \mathbf{vec}_{\mathbb{T}}$ *dualitou kategorie* $\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}$ *a té samé kategorie* $\mathbf{vec}_{\mathbb{T}}$*.*

KAPITOLA 10

Univerzální morfismus, univerzální objekt, digramy, limity a kolimity

Abstrakt. *Definujeme univerzální morfismus z objektu do funktoru a univerzálního objekt (duálně univerzální morfismus z funktoru do objektu a univerzální objekt z funktoru). Ukážeme, že na každý z těchto pojmů lze pohlížet jako na speciální případ toho druhého. Popíšeme kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ funktorů z kategorie $\mathbf{J}$ do kategorie $\mathbf{A}$. Diagram v kategorii $\mathbf{A}$ (indexovaný kategorií $\mathbf{J}$) definujeme jako objekt kategorie $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$. Zavedeme pojem kuželu nad (duálně pod) diagramem D. Limitu (respektive kolimitu) diagramu D definujeme jako univerzální kužel nad (respektive pod) D.*

10.1. Univerzální morfismus a univerzální objekt

Definice. Nechť $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je funktor a b je objekt kategorie $\boldsymbol{B}$. *Univerzální morfismus z b do F* je dvojice $\langle a, u\rangle$ kde a a je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $u\colon b \to F(a)$ je morfismus v kategorii $\mathbf{B}$ takový, že

> pro každou dvojici $\langle a', f\rangle$, kde a' je objekt a $f\colon b \to F(a')$ je morfismus v kategorii $\mathbf{B}$, existuje právě jeden morfismus $f'\colon a \to a'$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $f = F(f')u$.

Situace popsaná v definici univerzálního morfismu je znázorněna na následujícím obrázku:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[rrr, bend left, "F"] & & & \boldsymbol{B} & \\
& & & b \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[d, phantom, "\circ"] & \\
a \arrow[r, dotted, "\exists! f'"'] & a' & F(a) \arrow[rr, dotted, "F(f')"'] & & F(a')
\end{tikzcd}$$

Lemma 10.1.1. *Nechť $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je funktor a b je objekt kategorie $\boldsymbol{B}$. Jsou-li $\langle a, u\rangle$ a $\langle a', u'\rangle$ univerzální morfismy a b do F, existuje (právě jeden) izomorfimus $e\colon a \to a'$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $u' = F(e)u$.*

Naopak, je-li $\langle a, u\rangle$ univerzální morfismus z b do F a $e\colon a \to a'$ izomorfismus, je také $\langle a', F(e)u\rangle$ univerzální morfismus z b do F.

DŮKAZ. Protože je $\langle a, u\rangle$ univerzální morfismus z b do F, existuje právě jeden morfismus $e\colon a \to a'$ splňující $u' = F(e)u$. Podobně, z univerzality $\langle a', u'\rangle$ plyne existence právě jednoho morfismu $e'\colon a' \to a$ splňujícího $u = F(e')u'$. Odtud dostaneme, že

$$u = F(e')u' = F(e')F(e)u = F(e'e)u.$$

Zároveň platí, že

$$u = 1_{F(a)}u = F(1_a)u.$$

Z jednoznačnosti morfismu $f\colon a \to a$ takového, že $u = F(f)u$ dostaneme, že $1_a = e'e$. Podobně ukážeme, že $1_{a'} = ee'$ a proto jsou $e\colon a \to a'$ a $e'\colon a' \to a$ vzájemně inverzní izomorfismy.

Předpokládejme, že $\langle a, u\rangle$ je univerzální morfismus z b do F, a že $e\colon a \to a'$ je izomorfismus. Označme e' inverzi k e. Buď a'' libovolný objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $f\colon b \to F(a'')$ morfismus v $\mathbf{B}$. Potom existuje právě jeden morfismus $f'\colon a \to a''$ takový, že $f = F(f')u$. Odtud dostaneme, že

$$F(f'e')(F(e)u) = F(f')F(e'e)u = F(f')F(1_a)u = F(f')u = f.$$

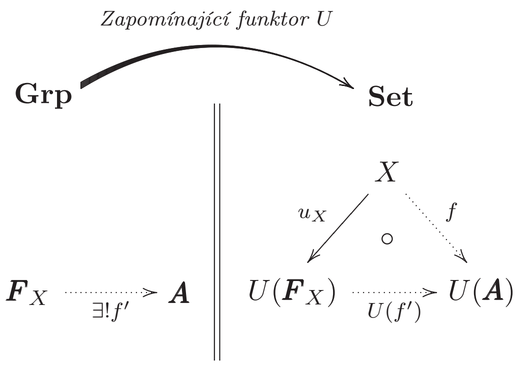
Je-li $f''\colon a' \to a''$ morfismus takový, že

$$f = F(f'')(F(e)u) = F(f''e)u,$$

plyne z jednoznačnosti morfismu f', že $f' = f''e$ a tedy $f'' = f'e'$. Proto je dvojice $\langle a', F(e)u\rangle$ univerzálním morfismem z b do F. □

PŘÍKLAD 10.1.1 (Volná grupa). *Buď $U\colon$ **Grp** $\to$ **Set** zapomínající funktor definovaný na předchozí přednášce. Pro každou množinu X můžeme sestrojit volnou grupu $\boldsymbol{F}_X$ s volnou bazí X (například jako množinu redukovaných slov nad X s operací redukovaného skládání[1]. Prvek $x \in X$ ztotožníme s posloupností x sestávající právě z tohoto prvku). Toto ztotožnění určuje kanonické vnoření $u\colon X \to U(\boldsymbol{F}_X)$. Z vlastností jež definují volnou grupu s bází X ihned plyne, že $\langle u, \boldsymbol{F}_X\rangle$ je univerzálním morfismem z množiny X do zapomínajícího funktoru U.*

[1]*Redukované slovo* je konečná posloupnost tvaru $x_0^{\varepsilon_0}x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, kde $x_i \in X$ a $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, neobsahující *triviální* úsek $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$. Při redukovaném násobení redukovaná slova napojíme a postupně krátíme případně vzniklé triviální úseky $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ dokud nezískáme opět redukované slovo. Je netriviálním cvičením ukázat, že výsledné redukované slovo nezávisí na pořadí, v jakém triviální úseky krátíme a že je redukované násobení asociativní.

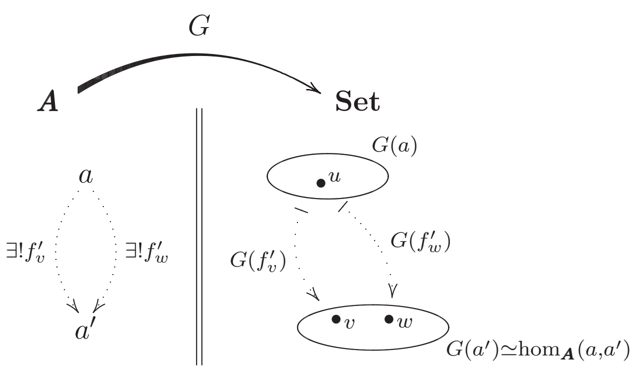


Příklad 10.1.2 (Podílové těleso). *V tomto příkladě uvažme (trochu uměle) kategorii* **Do-m** *jejíž objekty jsou obory integrity a jejíž morfismy jsou prosté okruhové homomorfismy a její úplnou podkategorii těles, kterou označíme* **Fld**. *Označme* $U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{Do\text{-}m}$ zapomínající *funktor, který přiřadí tělesu* $\mathbb{T}$ *obor integrity* $U(\mathbb{T})$ *získaný vynecháním parciální operace inverze a který je identitou na morfismech. Symbolem* $\mathbb{Q}(\boldsymbol{R})$ *označme podílové těleso oboru* $\boldsymbol{R}$ *a nechť* $u_{\boldsymbol{R}}\colon \boldsymbol{R} \to U(\mathbb{Q}(\boldsymbol{R}))$ *je kanonické vnoření dané předpisem* $a \mapsto \frac{a}{1}$). *Potom je dvojice* $\langle u_{\boldsymbol{R}}, \mathbb{Q}(\boldsymbol{R})\rangle$*univerzálním morfismem z* $\boldsymbol{R}$ *do daného zapomínajícího funktoru* U.

Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je kategorie a $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ funktor. *Univerzálním objektem funktoru* F rozumíme dvojici $\langle a, u\rangle$ sestávající z objektu kategorie $\mathbf{A}$ a prvku $u \in G(a)$ takového, že

> pro každou dvojici $\langle a', v\rangle$, kde a' je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $v \in G(a')$ existuje právě jeden morfismus $f'\colon a \to a'$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $v = G(f')(u)$.

Situaci si opět znázorníme graficky:



Lemma 10.1.2. *Nechť* $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$. *Jsou-li* $\langle a, u\rangle$ *a* $\langle a', u'\rangle$ *univerzální objekty funktoru* G, *existuje (právě jeden) izomorfimus* $e\colon a \to a'$ *v kategorii* $\mathbf{A}$ *takový, že* $u' = G(e)(u)$.

Je-li $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt funktoru G a je-li $e\colon a \to a'$ izomorfismus, je také $\langle a', G(e)(u)\rangle$ univerzální objekt G.

Důkaz je analogický jako v případě univerzálního morfismu.

Důkaz. Protože je $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt funktoru G, existuje právě jeden morfismus $e\colon a \to a'$ takový, že $u' = G(e)(u)$. Podobně, z univerzality $\langle a', u'\rangle$ plyne existence právě jednoho morfismu $e'\colon a' \to a$ splňujícího $u = G(e')(u')$. Odtud dostanem, že

$$u = G(e')(u') = G(e')(G(e)(u)) = (G(e') \circ G(e))(u) = G(e'e)(u)$$

Zároveň platí, že

$$u = 1_{G(a)}(u) = G(1_a)(u).$$

Z jednoznačnosti dostaneme, že $1_a = e'e$. Podobně ukážeme, že $1_{a'} = ee'$ a proto jsou $e\colon a \to a'$ a $e'\colon a' \to a$ vzájemně inverzní izomorfismy.

Předpokládejme, že je $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt funktoru G, a že $e\colon a \to a'$ je izomorfismus. Označme e' inverzi k e. Buď a'' libovolný objekt kategorie $\mathbf{A}$ a nechť $v \in G(a'')$. Protože je $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt funktoru G, existuje právě jeden morfismus $f'\colon a \to a''$ takový, že $v = G(f')(u)$. Odtud dostaneme, že

$$G(f'e')(G(e)(u)) = G(f'e'e)(u) = G(f')(G(e'e)(u)) = G(f')(u) = v$$

Je-li $f''\colon a' \to a''$ morfismus takový, že

$$v = G(f'')(G(e)(u)) = G(f''e)(u),$$

plyne z jednoznačnosti morfismu f', že $f' = f''e$ a tedy $f'' = f'e'$. Proto je $\langle a', G(e)(u)\rangle$ univerzálním objektem funktoru G. □

Příklad 10.1.3 (Tenzorový součin). *Fixujme těleso $\mathbb{T}$ a dvojici vektorových prostorů $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ nad $\mathbb{T}$. Uvažme vektorový prostor $\mathbb{T}^{(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}$ s bazí $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$. Na prvky tohoto prostoru můžeme nahlížet jako na formální součty*

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i\rangle\,,$$

kde $t_i \in \mathbb{T}$ a $\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i\rangle \in \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ pro všechna $i \in \{1,\dots,n\}$. Uvažme podprostor $\boldsymbol{K}$ prostoru $\mathbb{T}^{(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}$ generovaný vektory

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle\,, &\qquad (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}),\\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1\rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2\rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\rangle\,, &\qquad (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}),\\
t \cdot \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\,, &\qquad (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\ t \in \mathbb{T}),\\
t \cdot \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}, t\boldsymbol{v}\rangle\,, &\qquad (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\ t \in \mathbb{T}).
\end{aligned}\tag{13}$$

Položme

$$\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{V} = \mathbb{T}^{(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}/\boldsymbol{K}$$

a označme $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{K}$, *pro všechna* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ *a* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. *Výrazy v* (13) *můžeme chápat takto:* $\boldsymbol{K}$ *je nejmenší podprostor vektorového prostoru* $\mathbb{T}^{(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}$ *takový, že ve faktoru* $\mathbb{T}^{(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})}/\boldsymbol{K}$ *platí rovnosti*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \otimes \boldsymbol{v}, && (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}),\\
\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), && (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}),\\
t \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) &= (t\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \otimes (t\boldsymbol{v}), && (\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\ t \in \mathbb{T}).
\end{aligned}
$$

Odtud je vidět, že je kanonické *zobrazení*

$$
\begin{aligned}
\tau \colon \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} &\to \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V},\\
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle &\mapsto \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

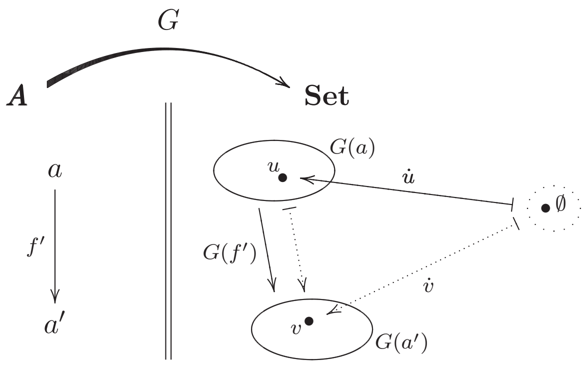
bilineární.

Pro těleso $\mathbb{T}$ *označme* $\mathbf{Vec}_{\mathbb{T}}$ *kategorii vektorových prostorů nad tímto tělesem. Fixujme těleso* $\mathbb{T}$ *a dvojici vektorových prostorů* $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ *nad* $\mathbb{T}$. *Pro* $\boldsymbol{W} \in \mathbf{Vec}_{\mathbb{T}}$ *označme* $B(\boldsymbol{W})$ *množinu všech bilineárních zobrazení* $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *a pro lineární zobrazení* $f \colon \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}'$ *buď* $B(f) \colon B(\boldsymbol{W}) \to B(\boldsymbol{W}')$ *zobrazení dané předpisem* $\phi \mapsto f \circ \phi$ *(rozmyslete, že pro bilineární zobrazení* $\phi \colon \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *dostaneme složením* $f \circ \phi$ *bilineární zobrazení* $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$*). Je snadné ověřit, že jsme takto definovali funktor* $B \colon \mathbf{Vec}_{\mathbb{T}} \to \mathbf{Set}$. *Potom je dvojice* $\langle \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}, \tau \rangle$ *kde,* $\tau \colon \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V}$ *je kanonické bilineární zobrazení dané předpisem* (14) *univerzálním objektem funktoru* B. *Rozmyslete si, že univerzalita tenzorového součinu znamená, že*

> *pro každý vektorový prostor* $\boldsymbol{W}$ *nad tělesem* $\mathbb{T}$ *a každé bilineární zobrazení* $\phi \colon \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *existuje právě jedno lineární zobrazení* $f \colon \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *takové, že* $\phi = f \circ \tau$, *tj. takové, že diagram*
>
> $$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\ \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{V} \arrow[rr, dotted, "\exists! f"'] & & \boldsymbol{W} \end{tikzcd}$$
>
> *komutuje.*

Připomeňme, že jsme přirozené 1 interpretovali jednoprvkovou množinou $1 = \{\emptyset\}$. Pro každou množinu X a každý prvek $x \in X$ označme $\dot{x}$ zobrazení $1 \to X$ takové, že $\dot{x}(\emptyset) = x$.

Tvrzení 10.1.3. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je nějaká kategorie a* $G \colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ *funktor. Potom je* $\langle a, u \rangle$ *univerzální objekt funktoru* G *právě když je* $\langle a, \dot{u} \rangle$ *univerzální morfismus z jednoprvkové množiny* 1 *do* G.



$$G(f')(u) = v \iff G(f') \circ \dot{u} = \dot{v}$$

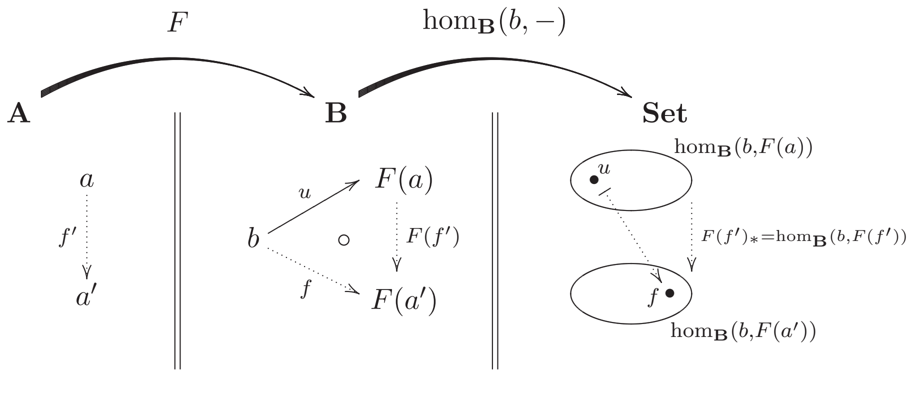
Důkaz. Uvědomme si, že pro každý objekt a' kategorie $\mathbf{A}$ platí rovnost

$$\hom_{\mathbf{Set}}(1, G(a')) = \left\{ \dot{v} \mid v \in G(a') \right\},$$

neboť každé zobrazení $1 \to G(a')$ je určeno svým jednoprvkovým obrazem. Dokazovaná ekvivalence pak plyne z toho, že pro každý morfismus $f \in \hom_{\mathbf{A}}(a, a')$ platí, že $G(f)(u) = v$ právě když $G(f) \circ \dot{u} = \dot{v}$. $\square$

Každý univerzální objekt lze tedy interpretovat jako speciální případ univerzálního morfismu. Ukážeme, že také naopak lze univerzální morfismy interpretovat jako speciální případy univerzálních objektů.

Tvrzení 10.1.4. *Nechť $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je funktor a b je objekt kategorie $\boldsymbol{B}$. Uvažme funktor $G := \hom_{\mathbf{B}}(b, F(-)) = \hom_{\mathbf{B}}(b, -) \circ F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$. Potom je dvojice $\langle a, u\rangle$ univerzálním morfismem z b do F právě když je univerzálním objektem funktoru G.*



Důkaz. Tvrzení plyne ihned z toho, že pro libovolné morfismy $f'\colon a \to a'$ v kategorii $\mathbf{A}$ a $f\colon F(a) \to F(a')$ v kategorii $\mathbf{B}$ platí, že

$$f = F(f') \circ u \iff f = F(f')_*(u) = G(f')(u).$$

□

Pojem univerzálního morfismu a univerzálního objektu můžeme definovat také v duálním kontextu:

DEFINICE. Nechť $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ je funktor a b je objekt kategorie $\boldsymbol{B}$. *Univerzální morfismus z F do b* je dvojice $\langle a, u\rangle$ kde a a je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $u\colon F(a) \to b$ je morfismus v kategorii $\mathbf{B}$ takový, že

> pro každou dvojici $\langle a', f\rangle$, kde a' je objekt a $f\colon F(a') \to b$ je morfismus v kategorii $\mathbf{B}$, existuje právě jeden morfismus $f'\colon a' \to a$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $f = u \circ F(f')$.

Nechť $\mathbf{A}$ je kategorie a $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ funktor. *Univerzálním objektem z funktoru F* rozumíme dvojici $\langle a, u\rangle$ sestávající z objektu kategorie $\mathbf{A}$ a prvku $u \in G(a)$ takového, že

> pro každou dvojici $\langle a', v\rangle$, kde a' je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $v \in G(a')$ existuje právě jeden morfismus $f'\colon a' \to a$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $u = G(f')(v)$.

Stejně jako k nim duální pojmy, jsou univerzální morfismy z funktorů do objektů a univerzální objekty z funktorů určeny jednoznačně až na izomorfismus (cf. Lemma 10.1.1 a Lemma 10.1.2).

10.2. Kategorie funktorů

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou libovolné kategorie. Definujeme kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ *funktorů z $\mathbf{B}$ do $\mathbf{A}$* takto:

- Objekty kategorie $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ jsou právě všechny funktory $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$;
- Morfismy kategorie $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ jsou právě všechny přirozené transformace mezi těmito funktory.

Pro dvojici funktorů $F, G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ budeme značit množinu $\hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{B}}}(F, G)$ všech přirozených transformací z F do G také $\mathrm{nat}(F, G)$. Tj.,

$$\mathrm{nat}(F, G) := \hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{B}}}(F, G) = \left\{\tau \mid \tau\colon F \xrightarrow{\bullet} G\right\}.$$

Protože morfismy v kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ odpovídají přirozeným transformacím, budeme pro ně používat značení $\xrightarrow{\bullet}$ (místo obvyklého $\to$).

10.3. Diagramy, jejich limity a kolimity

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{J}$ je dvojice kategorií. *Diagramem* v kategorii $\mathbf{A}$ *indexovaným* kategorií $\mathbf{J}$ budeme rozumět funktor $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$. Kategorii $\mathbf{J}$ budeme potom nazývat *indexovou kategorií* diagramu D. Na funktorovou kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ tak můžeme pohlížet jako na kategorii všech diagramů v kategorii $\mathbf{A}$ indexovaných kategorií $\mathbf{J}$.

Buď dána indexová kategorie $\mathbf{J}$. Pro každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$ definujeme diagram $\Delta_{\mathbf{J}}(a)$ takto:

$$\begin{aligned} j &\mapsto a, && (\forall\, j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})); \\ s &\mapsto 1_a, && (\forall\, s \in \mathrm{mor}(\mathbf{J})). \end{aligned}$$

Jsou-li s, t morfismy v kategorii $\mathbf{J}$ takové, že $\operatorname{dom} t = \operatorname{cod} s$, platí rovnosti $\Delta_{\mathbf{J}}(a)(t \circ s) = 1_a = 1_a \circ 1_a = \Delta_{\mathbf{J}}(a)(t) \circ \Delta_{\mathbf{J}}(a)(s)$, odkud je vidět, že je $\Delta_{\mathbf{J}}(a)\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ funktor (= diagram v $\mathbf{A}$ indexovaný $\mathbf{J}$). Pro morfismus $f\colon a \to b$ v kategorii $\mathbf{A}$ a každý objekt j kategorie $\mathbf{J}$ položme $\Delta_{\mathbf{J}}(f)_j := f$. Pro každý morfismus $s\colon i \to j$ v kategorii $\mathbf{J}$ je diagram

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop left, "1_a"] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, equal] \arrow[drr, equal] & & \\
& \Delta_{\mathbf{J}}(a)(i) \arrow[r, "\Delta_{\mathbf{J}}(a)(s)"'] \arrow[dd, "\Delta_{\mathbf{J}}(f)_i"] & \Delta_{\mathbf{J}}(a)(j) \arrow[dd, "\Delta_{\mathbf{J}}(f)_j"] \\
b \arrow[loop left, "1_b"] \arrow[dr, equal] \arrow[drr, equal] & & \\
& \Delta_{\mathbf{J}}(b)(i) \arrow[r, "\Delta_{\mathbf{J}}(b)(s)"'] & \Delta_{\mathbf{J}}(b)(j)
\end{tikzcd}$$

triviálně komutativní. Proto je $\Delta_{\mathbf{J}}(f) := \langle \Delta_{\mathbf{J}}(f)_j \mid j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})\rangle$ přirozenou transformací $\Delta_{\mathbf{J}}(a) \xrightarrow{\bullet} \Delta_{\mathbf{J}}(b)$.

Nyní je již snadné ověřit, že dvojice zobrazení $\Delta_{\mathbf{J}}\colon \operatorname{obj}(\mathbf{A}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{A}^{\mathbf{J}})$ a $\Delta_{\mathbf{J}}\colon \operatorname{mor}(\mathbf{A}) \to \operatorname{mor}(\mathbf{A}^{\mathbf{J}})$ určuje funktor $\Delta_{\mathbf{J}}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$.

Definice. Nechť $\mathbf{J}$ je indexová kategorie a $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ diagram v kategorii $\mathbf{A}$. *Kuželem nad diagramem* D rozumíme dvojici $\langle x, f\rangle$, kde x je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $f\colon \Delta_{\mathbf{J}}(x) \xrightarrow{\bullet} D$ je morfismus v kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$.

Duálně *kuželem pod diagramem* D rozumíme dvojici $\langle y, g\rangle$, kde y je objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $g\colon D \xrightarrow{\bullet} \Delta_{\mathbf{J}}(y)$ je morfismus v kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$.

Morfismy v kategorii $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ odpovídají přirozeným transformacím. Proto kužel nad diagramem D sestává z objektu x a z přirozené transformace $f\colon \Delta_{\mathbf{J}}(x) \xrightarrow{\bullet} D$. To znamená, že $f := \langle f_j\colon x \to D(j) \mid j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})\rangle$ je soubor morfismů v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že pro každý morfismus $s \in \hom_{\mathbf{J}}(i, j)$ je trojúhelník

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(s)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

komutativní.

Podobně kužel pod diagramem D sestává z objektu y a přirozené transformace $g\colon D \xrightarrow{\bullet} \Delta_{\mathbf{J}}(y)$. To znamená, že $g := \langle g_j\colon D(j) \to y \mid j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})\rangle$ je soubor morfismů v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že pro každý morfismus $s \in \hom_{\mathbf{J}}(i, j)$

je trojúhelník

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr, "D(s)"] \arrow[dr, "g_i"'] & & D(j) \arrow[dl, "g_j"] \\
& y &
\end{tikzcd}$$

komutativní.

Definice. Nechť $\mathbf{J}$ je indexová kategorie a $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ diagram v kategorii $\mathbf{A}$. *Limitou* diagramu D rozumíme univerzální morfismus z $\Delta_{\mathbf{J}}$ do D (tj., z funktoru $\Delta_{\mathbf{J}}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\mathbf{J}}$ do objektu D kategorie $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}$). *Kolimitou* diagramu D rozumíme univerzální morfismus z D do funktoru $\Delta_{\mathbf{J}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rrr, bend left, "\Delta_{\mathbf{J}}"] & & & \mathbf{A}^{\mathbf{J}} & \\
a & x \arrow[l, dotted, "\exists! f'"'] & \Delta_{\mathbf{J}}(a) \arrow[dr, "p"'] & & \Delta_{\mathbf{J}}(x) \arrow[ll, dotted, "\Delta_{\mathbf{J}}(f')"'] \arrow[dl, "f"] \\
& & & D &
\end{tikzcd}$$

Limita diagramu D

Z definice je vidět, že limita

$$\langle a, p := \langle p_j\colon a \to D(j) \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\rangle$$

je kuželem nad D takovým, že pro libovolný kužel

$$\langle x, f := \langle f_j\colon x \to D(j) \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\rangle$$

nad D existuje právě jeden morfismus $f'\colon x \to a$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $f_j = p_j \circ f'$ pro každé $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Jsou-li morfismy p_j, $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$ zřejmé z kontextu, nazýváme někdy limitou diagramu D samotný objekt a a značíme jej $\lim D$ nebo také $\varprojlim D$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, bend left, "\Delta_{\mathbf{J}}"] & & \mathbf{A}^{\mathbf{J}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, dotted, "\exists! g'"'] & y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q"] \arrow[dr, "g"] & \\ \Delta_{\mathbf{J}}(b) \arrow[rr, dotted, "\Delta_{\mathbf{J}}(g')"'] & & \Delta_{\mathbf{J}}(y) \end{tikzcd}$$

Kolimita diagramu D

Podobně jako limita je kolimita

$$\langle b, q := \langle q_j \colon D(j) \to b \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J}) \rangle \rangle$$

kuželem pod D takovým, že pro libovolný kužel

$$\langle y, g := \langle g_j \colon D(j) \to y \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J}) \rangle \rangle$$

pod D existuje právě jeden morfismus $g' \colon b \to y$ v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že $g_j = g' \circ q_j$ pro každé $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Jako kolimitou diagramu D někdy chápeme jen objekt b. Značíme jej $\operatorname{colim} D$ nebo také $\varinjlim D$.

Z Lemmatu 10.1.1 plyne, že limity diagramů jsou určeny jednoznačně až na izomorfismus. Podobně z jednoznačnosti univerzálních morfismů z funktorů $\Delta_{\mathbf{J}}$ do diagramů indexovaných kategorií $\mathbf{J}$ plyne, že kolimity těchto diagramů jsou určeny jednoznačně až na izomorfismus.

KAPITOLA 11

Konstrukce limit a kolimit, reprezentovatelné funktory a Yonedovo lemma

Abstrakt. *Budeme studovat součiny (kosoučiny) a ekvalizéry (koekvalizéry) a popíšeme je v kategorii množin, kategorii vektorových prostorů nad daným tělesem a v kategorii grup. Ukážeme, že kategorie je kompletní právě když má libovolné součiny a ekvalizéry. Duálně, kategorie je kokompletní právě když má libovolné kosoučiny a koekvalizéry. Podíváme se na reprezentovatelné funktory a ukážeme Yonedovo lemma.*

11.1. Součiny a kosoučiny

Kategorie $\mathbf{J}$ je *diskrétní* pokud

$$\operatorname{mor}(\mathbf{J}) = \{1_j \mid j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})\},$$

tj. pokud nemá netriviální morfismy. *Diskrétní diagram* v kategorii $\mathbf{A}$ je diagram indexovaný diskrétní kategorií.

- Limitu diskrétního diagramu $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ nazýváme *součinem* tohoto diagramu a značíme ji
$$\prod_{j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})} D(j).$$
- Kolimitu diskrétního diagramu $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ nazýváme *kosoučinem* a značíme ji
$$\coprod_{j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})} D(j).$$

Nechť $\langle a_j \mid j \in J \rangle$ je soubor objektů kategorie $\mathbf{A}$. Uvažme diskrétní kategorii $\mathbf{J}$ takovou, že $\operatorname{obj}(\mathbf{J}) = J$ a diagram $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ daný předpisem $D(j) := a_j$. Potom budeme užívat značení

$$\prod_{j \in J} a_j := \prod_{j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})} D(j), \text{ respektive } \coprod_{j \in J} a_j := \coprod_{j \in \operatorname{obj}(\mathbf{J})} D(j),$$

pro součin, respektive kosoučin tohoto diagramu. Limitu

$$\left\langle \prod_{j \in J} a_j, \left\langle p_j\colon \prod_{j \in J} a_j \to a_j \mid j \in J \right\rangle \right\rangle,$$

respektive

$$\left\langle \coprod_{j\in J} a_j, \left\langle q_j\colon a_j \to \coprod_{j\in J} a_j \mid j\in J\right\rangle\right\rangle,$$

budeme nazývat součinem, respektive kosoučinem, souboru $\langle a_j \mid j\in J\rangle$ objektů kategorie $\mathbf{A}$. Zobrazení p_j, respektive q_j, budeme nazývat *kanonické projekce*, respektive *kanonická vnoření*.

Uvažme diskrétní diagram $D\colon \mathbf{J}\to\mathbf{A}$ v kategorii $\mathbf{A}$. Protože je diagram D diskrétní, je dvojice $\langle x, \boldsymbol{f}\rangle$ kužel nad D pro každý systém morfismů

$$\boldsymbol{f} := \langle f_j\colon x\to D(j) \mid j\in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle \tag{15}$$

z objektu x do objektů diagramu D. Proto je dvojice $\langle a, \langle p_j \mid j\in\mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\rangle$ limitou diagramu D právě když pro každý objekt x v a kategorii $\mathbf{A}$ a každý systém morfismů (15) existuje právě jeden morfismus $f\colon x\to a$ takový, že $f_j = p_j\circ f$ pro všechna $j\in\mathrm{obj}(\mathbf{J})$.

Podobně je dvojice $\langle y, \boldsymbol{g}\rangle$ kužel pod D pro každý objekt y a každý systém morfismů

$$\boldsymbol{g} := \langle g_j\colon D(j)\to y \mid j\in\mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\,. \tag{16}$$

Odtud plyne, že je dvojice $\langle b, \langle q_j\colon D(j)\to b \mid j\in\mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\rangle$ kolimitou diagramu D právě když pro každý objekt y v a kategorii $\mathbf{A}$ a každý systém morfismů (16) existuje právě jeden morfismus $g\colon b\to y$ takový, že $g_j = g\circ q_j$ pro všechna $j\in\mathrm{obj}(\mathbf{J})$.

Ukázali jsme, že platí

Lemma 11.1.1. *Nechť $\langle a_j \mid j\in J\rangle$ je soubor objektů kategorie $\mathbf{A}$. Dvojice*

$$\langle a, \langle p_j\colon a\to a_j \mid j\in J\rangle\rangle$$

je limitou tohoto souboru právě když pro každý objekt x kategorie $\mathbf{A}$ a každý soubor morfismů $f_j\colon x\to a_j$, $j\in J$, existuje právě jeden morfismus $f\colon x\to a$ takový, že $f_j = p_j\circ f$ pro všechna $j\in J$.

Dvojice

$$\langle b, \langle q_j\colon a_j\to b \mid j\in J\rangle\rangle$$

je kolimitou tohoto souboru právě když pro každý objekt y kategorie $\mathbf{A}$ a každý soubor morfismů $g_j\colon a_j\to y$, $j\in J$, existuje právě jeden morfismus $g\colon b\to y$ takový, že $g_j = g\circ q_j$ pro všechna $j\in J$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "p_j"'] & x \arrow[l, dotted, "\exists! f"'] \arrow[dl, "f_j"] \\ a_j & \end{tikzcd}$$

součin

$$\begin{tikzcd} a_j \arrow[d, "q_j"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\ b \arrow[r, dotted, "\exists! g"'] & y \end{tikzcd}$$

kosoučin

Postupně si rozmyslíme jak vypadají součiny a kosoučiny v kategoriích **Set** - množin, $\mathbf{Vec}_{\mathbb{T}}$ - vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{T}$ a **Grp** - grup.

Nechť $\langle A_j \mid j \in J\rangle$ je soubor množin. Buď $A := \bigtimes_{j\in J} A_j$ jejich kartézský součin a

$$\begin{aligned} p_j \colon \bigtimes_{j\in J} A_j &\to A_j \\ \langle a_j\rangle_{j\in J} &\mapsto a_j \end{aligned}$$

projekce na j-tou souřadnici. Nechť X je množina a $\langle f_j \colon X \to A_j \mid j \in J\rangle$ soubor zobrazení. Snadno nahlédneme, že zobrazení

$$\begin{aligned} f \colon X &\to \bigtimes_{j\in J} A_j \\ x &\mapsto \langle f_j(x)\rangle_{j\in J} \end{aligned}$$

splňuje rovnost $f_j = p_j \circ f$ pro všechna $j \in J$. Všimněme si, že pro každé zobrazení $f' \colon X \to \prod_{j\in J} A_j$ a každé $x \in X$ platí, že $f'(x) = \langle p_j(f'(x))\rangle_{j\in J}$. Proto z rovností $f_j = p_j \circ f'$, $j \in J$, plyne, že $f' = f$. Ukázali jsme tak, že kartézský součin spolu s kanonickými projekcemi odpovídá součinu v kategorii množin. Podobně bychom nahlédli, že kartézský součin spolu s kanonickýmy projekcemi odpovídá součinu také v kategorii vektorových prostorů a v kategorii grup.

Buď $\bigsqcup_{j\in J} A_j$ disjunktní sjednocení množin A_j a $q_j \colon A_j \to \bigsqcup_{j\in J} A_j$, $j \in J$, inkluze. Buď Y libovolná množina $g_j \colon A_j \to Y$, $j \in J$, libovolný soubor zobrazení. Potom je zobrazení $g \colon \bigsqcup_{j\in J} A_j \to Y$ takové, že $g(a) = g_j(a)$ pro každé $j \in J$ a každé $a \in A_j$, zřejmě jediným zobrazením z $\bigsqcup_{j\in J} A_j$ do Y splňujícím $g_j = g \circ q_j$ pro všechna $j \in J$. Proto v kategorii množin odpovídá kosoučin disjunktnímu sjednocení.

Nechť $\langle V_j \mid j \in J\rangle$ je soubor vektorových prostorů nad daným tělesem $\mathbb{T}$. *Vnějším direktním součtem* prostorů V_j rozumějme podprostor

$$\bigoplus_{j\in J} V_j = \left\{ \langle v_j\rangle_{j\in J} \mid v_j = 0 \text{ pro skoro všechna } j \in J \right\}$$

kartézského součinu $\bigtimes_{j\in J} V_j$. Pro každé $j \in J$ označme $\widehat{p}_j \colon \bigoplus_{j\in J} V_j \to V_j$ restrikci kanonické projekce $p_j \colon \bigtimes_{j\in J} V_j \to V_j$ na podprostor $\bigoplus_{j\in J} V_j$. Dále uvažme vnoření $q_j \colon V_j \to \bigoplus_{j\in J} V_j$ dané předpisy

$$v \mapsto \langle 0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0\rangle ,$$

kde nenulové prvky v jsou v j-té souřadnici. To znamená, že pro všechna $i, j \in J$ platí

$$\widehat{p}_i \circ q_j = \begin{cases} 1_{V_j}, & \text{pokud } i = j, \\ 0, & \text{pokud } i \neq j. \end{cases} \tag{17}$$

Všimněme si také, že platí

$$\sum_{j\in J} q_j \circ \widehat{p}_j = 1_{\bigoplus_{j\in J} V_j}. \tag{18}$$

Buď W vektorový prostor a $\langle g_j : V_j \to W \mid j \in J \rangle$, soubor lineárních zobrazení. Položme

$$g = \sum_{j\in J} g_j \circ \widehat{p}_j.$$

To znamená, že $g\colon \bigoplus_{j\in J} V_j \to W$ je zobrazení definované předpisem

$$v = \langle v_j \rangle_{j\in J} \mapsto \sum_{j\in J} g_j \circ \widehat{p}_j(v) = \sum_{j\in J} g_j(v_j).$$

Vzhledem k (17) platí pro každé $j \in J$ rovnosti

$$g \circ q_j = \sum_{i\in J} g_i \circ \widehat{p}_i \circ q_j = g_j \circ \widehat{p}_j \circ q_j = g_j \circ 1_{V_j} = g_j.$$

Předpokládejme, že $g'\colon \bigoplus_{j\in J} V_j \to W$ je lineární zobrazení takové, že platí $g_j = g' \circ q_j$ pro všechna $j \in J$. Potom vzhledem k rovnosti (18) a linearitě zobrazení g' platí, že

$$g' = g' \circ \left(\sum_{j\in J} q_j \circ \widehat{p}_j \right) = \sum_{j\in J} g' \circ q_j \circ \widehat{p}_j = \sum_{j\in J} g_j \circ \widehat{p}_j = g.$$

Ukázali jsme, že vektorový prostor $\bigoplus_{j\in J} V_j$ spolu se souborem lineárních zobrazení $\left\langle q_j \colon V_j \to \bigoplus_{j\in J} V_j \mid j \in J \right\rangle$ tvoří kosoučin souboru vektorových prostorů $\langle V_j \mid j \in J\rangle$. Proto kosoučiny v kategorii $\mathbf{Vec}_{\mathbb{T}}$ odpovídají direktním součtům.

Zbývá popis kosoučinu v kategorii grup. Nechť je $\langle G_j \mid j \in J\rangle$ soubor grup. Pro každé $j \in J$ položme $G_j^{\#} := G_j \setminus \{1\}$[1] a uvažme disjunktní sjednocení $X = \left(\bigsqcup_{j\in J} G_j^{\#} \right) \sqcup \{1\}$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je *asociován* s indexem $j \in J$ pokud $x \in G_j$ (prvek 1 je tedy asociovaný se všemi indexy $j \in J$). *Slovem nad* X rozumějme neprázdnou konečnou posloupnost $x_1 \dots x_n$ prvků z X. Řekneme, že slovo $x_1 \dots x_n$ je *v redukovaném tvaru* pokud žádné dva sousední znaky x_i a x_{i+1} nejsou asociovány s týmž indexem $j \in J$. *Redukcí* slova $x_1 \dots x_n$ rozumějme nahrazení některého z jeho úseku $x_i x_{i+1}$ takových, že obě x_i, x_{i+1} jsou asociovány se stejným indexem j součinem $x_i \cdot x_{i+1}$ v G_j a zkrácení výchozího slova o jeden znak. Je zřejmé, že postupným redukováním převedeme každé slovo $s := x_1 \dots x_n$ na slovo v redukovaném tvaru. Netriviální je to, že tento redukovaný tvar je určen jednoznačně (cf. [**4**, Theorem 11.52]). Redukovaný tvar slova s označíme $\mathrm{red}(s)$. Pro dvojici slov $s := x_1 \dots x_n$ a $t := y_1 \dots y_k$ položme $s\_t = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_k$ a definujme $s * t := \mathrm{red}(s\_t)$. Z jednoznačnosti redukovaného tvaru nahlédneme, že je operace $*$ asociativní. Symbolem

$$\mathop{*}_{j\in J} G_j$$

[1] Z každé z grup G_j vyjmeme jednotkový prvek.

označme množinu všech slov nad X v redukovaném tvaru spolu s operací $*$ redukovaného násobení. Z definice je vidět, že $1 \in *_{j\in J} G_j$ a že pro každé slovo s v redukovaném tvaru platí rovnosti $1 * s = s * 1 = s$. Pro slovo $s = x_1 \cdots x_n$ položme $s^{-1} = x_n^{-1} \cdots x_1^{-1}$. Snadno nahlédneme, že je-li slovo s v redukovaném tvaru, je také s^{-1} v redukovaném tvaru a platí $s * s^{-1} = s^{-1} * s = 1$. Proto je $*_{j\in J} G_j$ grupa. Budeme ji nazývat *volným součinem grup* G_j.

Všimněme si, že každé slovo délky jedna je v redukovaném tvaru. Je-li $j \in j$ a jsou-li $x, y \in G_j$, platí, že

$$x * y = \mathrm{red}(x\_y) = x \cdot y.$$

Proto jsou

$$q_j \colon G_j \to \mathop{*}_{j\in J} G_j$$
$$x \mapsto x$$

vnořeními grup.

Nechť H je grupa a $\langle g_j \colon G_j \to H \mid j \in J\rangle$ soubor grupových homomorfismů. Buď $x_1 \ldots x_n$ slovo nad X a $j_1, \ldots, j_n$ posloupnost indexů taková, že $x_i \in G_{j_i}$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Položme

$$g(x_1 \ldots x_n) = g_{j_1}(x_1) \cdots g_{j_n}(x_n)$$

Odtud je vidět, že

$$g(s\_t) = g(s) \cdot g(t) \tag{19}$$

pro každou dvojici slov s, t nad X. Jsou-li x_i, x_{i+1} asociovány s týmž indexem j, tj. pokud $x_i, x_{i+1} \in G_j$, platí, že

$$g(x_i x_{i+1}) = g_j(x_i) \cdot g_j(x_{i+1}) = g_j(x_i \cdot x_{i+1}) = g(x_i \cdot x_{i+1}).$$

Odtud plyne, že

$$g(s) = g(\mathrm{red}(s)) \tag{20}$$

pro každé slovo s nad X. Z rovností (19) a (20) odvodíme, že

$$g(s * t) = g(\mathrm{red}(s\_t)) = g(s\_t) = g(s) \cdot g(t),$$

pro každou dvojici slov s, t. Proto je $g \colon *_{j\in J} G_j \to H$ grupovým homomorfismem.

Buď $g' \colon *_{j\in J} G_j \to H$ grupový homomorfismus takový, že pro každé $j \in J$ platí rovnost $g_j = g \circ q_j$. Potom pro každé slovo $x_1 \ldots x_n$ v redukovaném tvaru platí, že

$$g(x_1 \ldots x_n) = g_{j_1}(x_1) \cdots g_{j_n}(x_n),$$

kde $j_1, \ldots, j_n \in J$ jsou taková, že x_i jsou asociována s j_i pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Odtud plyne, že $g' = g \restriction *_{j\in J} G_j$.

Ukázali jsme, že volný součin $*_{j\in J} G_j$ spolu s vnořeními $q_j \colon G_j \to *_{j\in J} G_j$, $j \in J$, tvoří kosoučin souboru $\langle G_j \mid j \in J\rangle$. Proto kosoučiny v kategorii grup odpovídají volným součinům.

11.2. Ekvalizéry a koekvalizéry

Nechť $\mathbf{J}$ je kategorie se dvěma objekty $0, 1$ a dvojicí netriviálních paralelních morfismů $s, t\colon 0 \to 1$, znázorněná na následujícím obrázku:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "1_0"] \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "t"'] & 1 \arrow[loop right, "1_1"] \end{tikzcd}$$

Buď $\mathbf{A}$ libovolná kategorie a uvažme diagram $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$. Kužel nad D pak sestává z objektu x a dvojice morfismů $f_i\colon x \to D(i)$, $i = 0, 1$, takových, že

$$f_1 = D(s) \circ f_0 = D(t) \circ f_0.$$

Vidíme, že morfismus f_0 jednoznačně určuje f_1. Proto je kužel nad D dán objektem x kategorie $\mathbf{A}$ a morfismem $f_0\colon x \to D(0)$ takovým, že $D(s) \circ f_0 = D(t) \circ f_0$. Podobně platí, že kužel pod D je určen objektem y a morfismem $g_1\colon D(1) \to y$ takovým, že

$$g_1 \circ D(s) = g_1 \circ D(t).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f_0"] \arrow[rr, bend left=50, dotted, "f_1"] & D(0) \arrow[r, bend left, "D(s)"] \arrow[r, bend right, "D(t)"'] & D(1) \end{tikzcd}$$

Kužel nad D

$$\begin{tikzcd} D(0) \arrow[r, bend left, "D(s)"] \arrow[r, bend right, "D(t)"'] \arrow[rr, bend right=50, dotted, "g_0"'] & D(1) \arrow[r, "g_1"'] & y \end{tikzcd}$$

Kužel pod D

Nechť $u, v\colon c_0 \to c_1$ je dvojice paralelních morfismů v dané kategorii $\mathbf{A}$. Uvažme diagram $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ takový, že $D(s) = u$ a $D(t) = v$. *Ekvalizérem* (resp. *koekvalizérem*) dvojice u, v budeme rozumět limitu (resp. kolimitu) diagramu D.

Formálně je ekvalizér morfismů u, v dvojice $\langle a, \langle p_i\colon a \to c_i \mid i = 0, 1\rangle\rangle$ taková, že $up_0 = vp_0 = p_1$ a pro každé $\langle x, \langle f_i\colon x \to c_i \mid i = 1, 2\rangle\rangle$ takové, že $uf_0 = vf_0 = f_1$ existuje právě jeden morfismus $f\colon x \to a$ takový, že $f_i = p_i f$ pro $i = 0, 1$. Morfismy p_1 (resp. f_1) jsou určeny morfismy p_0 (resp. f_0). Navíc z $f_0 = p_0 f$ plyne rovnost $f_1 = uf_0 = up_0 f = p_1 f$. Proto podobně jako výše je ekvalizér morfismů u, v určen morfismem $p_0\colon a \to c_0$ takovým, že

- $up_0 = vp_0$,
- pro každý objekt x a každý morfismus $f_0 \colon x \to c_0$ takový, že $uf_0 = vf_0$, existuje právě jeden morfismus $f \colon x \to a$ splňující $f_0 = p_0 f$.

Podobně ukážeme, že koekvalizér morfismů u, v je určen morfismem $q_1 \colon c_1 \to b$ takovým, že

- $q_1 u = q_1 v$,
- pro každý objekt y a každý morfismus $g_1 \colon c_1 \to y$ takový, že $g_1 u = g_1 v$, existuje právě jeden morfismus $g \colon b \to y$ splňující $g_1 = g q_1$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & y \\
a \arrow[r, "p_0"] & c_0 \arrow[rr, bend left, "u"] \arrow[rr, bend right, "v"'] & & c_1 \arrow[r, "q_1"'] \arrow[ur, "g_1"] & b \arrow[u, dotted, "\exists! g"'] \\
x \arrow[u, dotted, "\exists! f"] \arrow[ur, "f_0"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Ekvalizér Koekvalizér

Neformálně ztotožníme morfismus ekvalizér (resp. koekvalizér) morfismů u, v s morfismem $p_0 \colon a \to c_0$ (resp. $q_1 \colon c_1 \to b$).

Lemma 11.2.1. *Každý ekvalizér je monomorfismus a každý koekvalizér je epimorfismus.*

Důkaz. Buď $u, v \colon c_0 \to c_1$ dvojice paralelních morfismů v kategorii $\mathbf{A}$ a $p_0 \colon a \to c_0$ ekvalizér u, v. Předpokládejme, že pro morfismy $f', f'' \colon x \to a$ platí rovnost $p_0 f' = p_0 f''$. Položme $f_0 = p_0 f'$ a všimněme si, že platí $uf_0 = up_0 f' = vp_0 f' = vf_0$. Protože p_0 je ekvalizér morfismů u, v, existuje právě jeden morfimus $f \colon x \to a$ takový, že $f_0 = p_0 f$. Z jednoznačnosti tohoto morfismu plyne, že $f' = f = f''$. Proto je p_0 monomorfismus.

Podobně ukážeme, že koekvalizéry jsou epimorfismy. $\square$

Podobně jako v případě součinů a kosoučinů popíšeme ekvalizéry a koekvalizéry v kategoriích množin, vektorových prostorů a grup.

Uvažme množiny C_0, C_1 a dvojici zobrazení $u, v \colon C_0 \to C_1$. Položme

$$A := \{c \in C_0 \mid u(c) = v(c)\} \tag{21}$$

a označme $p_0 \colon A \to C_0$ vnoření inkluzí. Předpokládejme, že $f_0 \colon X \to C_0$ je zobrazení takové, že $uf_0 = vf_0$. Potom $uf_0(c) = vf_0(c)$ pro všechna $c \in C_0$. Proto platí inkluze $f_0(X) \subseteq A$. Odtud plyne, že existuje právě jedno zobrazení $f \colon X \to A$ takové, že $f_0 = p_0 f$.[2] Proto je inkluze $p_0 \colon A \to C_0$ ekvalizérem zobrazení u a v.

[2] Neformálně jsou zobrazení f_0 a f totožné. Formálně může platit, že $\operatorname{cod} f = A \subsetneq C_0 = \operatorname{cod} f_0$ a tedy f a f_0 mohou být různé morfismy.

Označme Θ nejmenší ekvivalenci na množině C_1 takovou, že $u(c_0) \equiv v(c_0) \pmod{\Theta}$ pro všechna $c_0 \in C_0$ a položme

$$B := C_1/\Theta = \{[\,c_1\,]_\Theta \mid c_1 \in C_1\}\,,$$

kde $[\,c_1\,]_\Theta = \{c_1' \in C_1 \mid c_1 \equiv c_1' \pmod{\Theta}\}$ je třída ekvivalence Θ obsahující prvek $c_1 \in C_1$. Označme $q_1\colon C_1 \to B = C_1/\Theta$ kanonickou projekci $c_1 \mapsto [\,c_1\,]_\Theta$. Buď Y množina a $g_1\colon C_1 \to Y$ zobrazení takové, že $ug_1 = vg_1$. Položme

$$\ker g_1 := \bigl\{\bigl\langle c_1, c_1'\bigr\rangle \in C_1 \times C_1 \mid g_1(c_1) = g_1(c_1')\bigr\}\,.$$

Snadno nahlédneme, že $\ker g_1$ je ekvivalence na C_1 a protože $ug_1 = vg_1$, je $\langle u(c_0), v(c_0)\rangle \in \ker g_1$ pro všechna $c_0 \in C_0$. Odtud plyne, že $\Theta \subseteq \ker g_1$ a předpisem $[\,c_1\,]_\Theta \mapsto g_1(c_1)$ je jednoznačně určeno zobrazení $g\colon B \to Y$ takové, že $g_1 = g \circ q_1$. Proto je $q_1\colon C_1 \to B$ koekvalizérem morfismů u, v.

V případě ekvalizérů v kategoriích vektorových prostorů, resp. grup, postupujeme obdobně. Jen je třeba ověřit, že množina A definovaná v (21) je univerzem podprostoru (resp. podgrupy) C_0. Abychom popsali koekvalizéry v kategorii vektorových prostorů, položíme

$$K := \{u(c_0) - v(c_0) \mid c_0 \in C_0\}$$

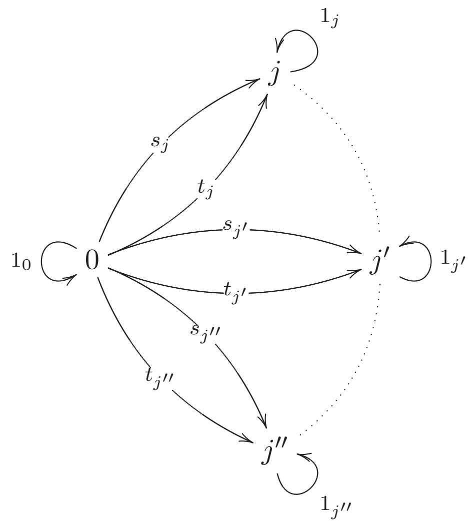
a ověříme, že K je podprostor prostoru C_1. Dále položíme $B = C_1/K$ a definujeme $q_1\colon C_1 \to C_1/K = B$ jako kanonickou projekci. V případě grup označíme N normální podgrupu generovanou množinou $\bigl\{u(c_0)v(c_0)^{-1} \mid c_0 \in C_0\bigr\}$. Podobně jako v předchozích případech položíme $B = C_1/N$ a definujeme $q_1\colon C_1 \to C_1/N = B$ jako kanonickou projekci. To, že q_1 je koekvalizér homomorfismů u a v plyne z věty o homomorfismu (cf. [**1**, Věta III.2.12] pro grupy a [**1**, Věta VI.3.4] pro vektorové prostory).

11.3. Konstrukce limit a kolimit

Buď J libovolná množina. Uvažme kategorii $\mathbf{J}$ takovou, že

$$\begin{aligned}
\mathrm{obj}(\mathbf{J}) &:= \{0\} \cup J,\\
\mathrm{mor}(\mathbf{J}) &:= \{1_j \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\} \sqcup \{s_j, t_j\colon 0 \to j \mid j \in J\}\,.
\end{aligned}$$

Kategorie **J** je znázorněna na obrázku:



Nechť **A** je libovolná kategorie, J množina a $U := \langle u_j \colon c_0 \to c_j \mid j \in J\rangle$, $V := \langle v_j \colon c_0 \to c_j \mid j \in J\rangle$ dvojice souborů morfismů, které všechny mají společný domain c_0 a morfismy s_j, t_j mají společný kodomain c_j pro všechna $j \in J$. Takové dva soubory budeme nazývat *paralelní*. Dvojici $\langle U, V\rangle$ přiřaďme diagram $D \colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ tak, že $D(s_j) := u_j$ a $D(t_j) := v_j$. *Ekvalizérem souborů* U, V budeme rozumět limitu diagramu D. Podobně jako v případě ekvalizérů je každý kužel nad D určen morfismem $f_0 \colon x \to c_0$ takovým, že $s_j f_0 = t_j f_0$ pro všechna $j \in J$. Limita diagramu D je potom určena objektem a a morfismem $p_0 \colon a \to c_0$ takovým, že

- $s_j p_0 = t_j p_0$ pro všechna $j \in J$,
- je-li $f_0 \colon x \to c_0$ morfismus takový, že $s_j f_0 = t_j f_0$ pro všechna $j \in J$, existuje právě jeden morfismus $f \colon x \to a$ takový, že $f_0 = p_0 f$.

Lemma 11.3.1. *Předpokládejme, že v kategorii* **A** *existuje ekvalizér libovolné dvojice paralelních morfismů. Nechť* $U := \langle u_j \colon c_0 \to c_j \mid j \in J\rangle$ *a* $V := \langle v_j \colon c_0 \to c_j \mid j \in J\rangle$ *jsou paralelní soubory morfismů v* **A**. *Pokud v kategorii* **A** *existuje součin souboru* $\langle c_j \mid j \in J\rangle$ *pak v* **A** *existuje ekvalizér souborů* U, V.

$$
\begin{tikzcd}
 & & c_j \arrow[dd, dotted, no head, bend left] & \\
a \arrow[r, "p_0"] & c_0 \arrow[ur, bend left, "u_j"] \arrow[ur, bend right, "v_j"'] \arrow[dr, bend left, "u_{j'}"] \arrow[dr, bend right, "v_{j'}"'] \arrow[rr, bend left=70, "u"] \arrow[rr, bend right=70, "v"'] & & \prod_{j\in J} c_j \arrow[ul, "p_j"'] \arrow[dl, "p_{j'}"] \\
 & & c_{j'} &
\end{tikzcd}
$$

Důkaz. Nechť $\left\langle \prod_{j\in J} c_j, \left\langle p_j \colon \prod_{j\in J} c_j \to c_j \mid j \in J \right\rangle\right\rangle$ je součin souboru $\langle c_j \mid j \in J\rangle$. Vzhledem k univerzální vlastnosti součinu existují jednoznačně určené morfismy $u, v \colon c_0 \to \prod_{j\in J} c_j$ takové, že $u_j = p_j u$ a $v_j = p_j v$ pro všechna $j \in J$. Nakonec buď $p_0 \colon a \to c_0$ ekvalizér morfismů u a v. Ukážeme, že p_0 je současně ekvalizér souborů U, V.

Protože $up_0 = vp_0$, platí pro každé $j \in J$ rovnosti

$$u_j p_0 = p_j u p_0 = p_j v p_0 = v_j p_0.$$

Buď $f_0 \colon x \to c_0$ morfismus takový, že $u_j f_0 = v_j f_0$ pro všechna $j \in J$. Odtud plyne, že

$$p_j u f_0 = u_j f_0 = v_j f_0 = p_j v f_0,$$

pro všechna $j \in J$. Z vlastností součinu plyne, že existuje právě jeden morfismus $w \colon x \to \prod_{j\in J} c_j$ takový, že $p_j w = p_j u f_0$, pro všechna $j \in J$. Proto $uf_0 = w = vf_0$. Vzhledem k tomu, že je $p_0 \colon a \to c_0$ ekvalizér morfismů u, v, existuje právě jeden morfismus $f \colon x \to a$ takový, že $f_0 = p_0 f$. To ale znamená, že p_0 je ekvalizér souborů U, V. $\square$

Věta 11.3.2. *Buď* $\mathbf{A}$ *kategorie v níž existují libovolné ekvalizéry. Buď dále* $\mathbf{J}$ *kategorie taková, že v* $\mathbf{A}$ *existuje součin každého souboru objektů indexovaného buďto množinou* $\mathrm{obj}(\mathbf{J})$ *nebo množinou* $\mathrm{mor}(\mathbf{J})$*. Potom v* $\mathbf{A}$ *existuje limita každého diagramu indexovaného kategorií* $\mathbf{J}$*.*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p_0"] & \prod_{j' \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})} D(j') \arrow[r, "p'_i"] \arrow[dr, "p'_j"'] & D(i) \arrow[d, "D(s)"] & x \arrow[l, "f_i"'] \arrow[dl, "f_j"] \arrow[lll, bend right=60, dotted, "f'"'] \arrow[lll, bend right=45, dotted, "\exists!\, f"'] \arrow[ll, bend right=40, dotted, "\exists!\, f_0"'] \\
 & & D(j) &
\end{tikzcd}
$$

DŮKAZ. Buď $D\colon \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ libovolný diagram indexovaný kategorií $\mathbf{J}$. Podle předpokladu existuje součin

$$\left\langle \prod_{j' \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})} D(j'), \left\langle p'_j\colon \prod_{j' \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})} D(j') \to D(j) \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J}) \right\rangle \right\rangle,$$

souboru $\langle D(j) \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle$. Všimněme si, že tento součin by byl limitou diagramu D pokud $p'_j = D(s)p'_i$ pro každý morfismus $s\colon i \to j$ v kategorii $\mathbf{J}$. To však nemusí platit. Proto pro každý morfismus $s\colon i \to j$ v $\mathbf{J}$ položme $u_s := D(s) \circ p'_i$, $v_s = p'_j$ a uvažme soubory morfismů

$$U := \langle u_s \mid s\colon i \to j \in \mathrm{mor}(\mathbf{J})\rangle \quad \text{a} \quad V := \langle v_s \mid s\colon i \to j \in \mathrm{mor}(\mathbf{J})\rangle\,.$$

Podle předpokladu existuje součin souboru $\langle D(\mathrm{cod}\, s) \mid s \in \mathrm{mor}(\mathbf{J})\rangle$. Vzhledem k Lemmatu 11.3.1 existuje ekvalizér $p_0\colon a \to \prod_{j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})} D(j)$ souborů U, a V. Ukážeme, že objekt a spolu s morfismy $p_j := p'_j p_0$, $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$, tvoří limitu diagramu D.

Buď $\langle x, \langle f_j\colon x \to D(j) \mid j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})\rangle\rangle$ kužel nad D. Ukážeme, že existuje právě jeden morfismus $f\colon x \to a$ splňující

$$p_j f = f_j, \tag{22}$$

pro všechna $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Z vlastností součinu plyne existence (právě jednoho) morfismu $f_0\colon x \to \prod_{j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})}$ takového, že

$$p'_j f_0 = f_j, \tag{23}$$

pro všechna $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Pro každý morfimus $s\colon i \to j$ v kategorii $\mathbf{J}$ platí, že $D(s) f_i = f_j$, odkud plyne rovnost

$$u_s f_0 = D(s)\, p'_i f_0 = p'_j f_0 = v_s f_0.$$

Protože p_0 je ekvalizér souborů U a V, existuje právě jeden morfismus $f\colon x \to a$ takový, že

$$f_0 = p_0 f. \tag{24}$$

Odtud vzhledem k (23) plyne, že

$$p_j f = p'_j p_0 f = p'_j f_0 = f_j,$$

pro všechna $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$.

Zbývá ukázat, že morfismus f je určen rovnostmi (22) jednoznačně. Nechť $f' \colon x \to a$ je morfismus takový, že

$$p_j f' = f_j,$$

pro všechna $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Odtud plyne, že $p'_j p_0 f' = f_j$ pro všechna $j \in \mathrm{obj}(\mathbf{J})$. Vzhledem k tomu, že morfismum f_0 je určen rovnostmi (23) jednoznačně, dostaneme odtud, že $f_0 = p_0 f'$. Morfismus f je určen rovností (24) a proto $f' = f$. □

Definice. Řekneme, že je kategorie $\mathbf{A}$ *kompletní*, respektive *konečně kompletní*, má-li každý diagram v $\mathbf{A}$, respektive každý konečný diagram v $\mathbf{A}$, limitu.

Z Věty 11.3.2 ihned plyne, že

Důsledek 11.3.3. *Kategorie* $\mathbf{A}$ *je kompletní právě když má všechny ekvalizéry a všechny součiny.*

a

Důsledek 11.3.4. *Kategorie* $\mathbf{A}$ *je konečně kompletní právě když má všechny ekvalizéry a všechny součiny konečných souborů objektů.*

Duálně lze ukázat analogie Věty 11.3.2 a jejích důsledků pro koekvalizéry, kosoučiny a kolimity.

Věta 11.3.5. *Buď* $\mathbf{A}$ *kategorie v níž existují libovolné koekvalizéry. Buď dále* $\mathbf{J}$ *kategorie taková, že v* $\mathbf{A}$ *existuje kosoučin každého souboru objektů indexovaného buďto množinou* $\mathrm{obj}(\mathbf{J})$ *nebo množinou* $\mathrm{mor}(\mathbf{J})$*. Potom v* $\mathbf{A}$ *existuje kolimita každého diagramu indexovaného kategorií* $\mathbf{J}$*.*

Definice. Řekneme, že je kategorie $\mathbf{A}$ *kokompletní*, respektive *konečně kokompletní*, má-li každý diagram v $\mathbf{A}$, respektive každý konečný diagram v $\mathbf{A}$, kolimitu.

Důsledek 11.3.6. *Kategorie* $\mathbf{A}$ *je kokompletní právě když má všechny koekvalizéry a všechny kosoučiny.*

Důsledek 11.3.7. *Kategorie* $\mathbf{A}$ *je konečně kompletní právě když má všechny koekvalizéry a všechny kosoučiny konečných souborů objektů.*

Poznámka. *Konstrukce kolimit diagramů pomocí kosoučinů a koekvalizérů odpovídá strategii konstrukcí struktur (v našem případě objektů dané kategorii) pomocí jejich prezentací, to znamená pomocí generátorů a relací. Konkrétně kosoučin odpovídá konstrukci volné struktury pomocí generátorů a projekce na koekvalizátor faktorizaci podle relací, které jsou v našem případě popsány dvojicí souborů morfismů.*

11.4. Reprezentovatelné funktory a Yonedovo lemma

DEFINICE. Buď $\mathbf{A}$ kategorie a $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ funktor z této kategorie to kategorie množin. *Reprezentací* funktoru G budeme rozumět přirozený izomorfismus $\varphi\colon \hom_{\mathbf{A}}(a, -) \overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}} G$, pro nějaký objekt a kategorie $\mathbf{A}$.

Řekneme, že funktor G je *reprezentovatelný*, pokud existuje nějaká jeho reprezentace.

Ukážeme si, že reprezentace funktoru $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ odpovídají univerzálním objektům do tohoto morfismu. Z definice plyne, že je-li $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt morfismu G, je pro každý objekt a' kategorie $\mathbf{A}$ definována předpisem $f \mapsto G(f)(u)$ bijekce $\hom_{\mathbf{A}}(a, a') \to G(a')$.

VĚTA 11.4.1. *Uvažme funktor $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$. Je-li $\langle a, u\rangle$ univerzální objekt tohoto funktoru, je předpisy*

$$\begin{aligned} \varphi_{a'}\colon \hom_{\mathbf{A}}(a, a') &\to G(a') \\ f &\mapsto G(f)(u) \end{aligned} \tag{25}$$

určena reprezentace $\varphi := \langle \varphi_{a'} \mid a' \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})\rangle : \hom_{\mathbf{A}}(a, -) \overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}} G$ tohoto funktoru.

Naopak pro každou reprezentaci φ funktoru G existuje univerzální objekt $\langle a, u\rangle$ takový, že φ je definovaná pomocí (25).

DŮKAZ. Z univerzality objektu $\langle a, u\rangle$ plyne, že jsou zobrazení $\varphi_{a'}$, $a' \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$, bijekce. Ukážeme, že je φ přirozená transformace. To plyne z toho, že diagram

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{A}}(a, a') \arrow[r, "\varphi_{a'}"] \arrow[d, "g_* = \hom_{\mathbf{A}}(a, g)"'] & G(a') \arrow[d, "G(g)"] \\ \hom_{\mathbf{A}}(a, a'') \arrow[r, "\varphi_{a''}"] & G(a'') \end{tikzcd}$$

komutuje pro všechny morfismy $g\colon a' \to a''$ v kategorii $\mathbf{A}$. Pro každý morfismus $f\colon a \to a'$ totiž platí, že

$$\varphi_{a''}(g_*(f)) = \varphi_{a''}(gf) = G(gf)(u) = G(g)(f(u)) = G(g)(\varphi_{a'}(f)).$$

Naopak nechť je $\varphi\colon \hom_{\mathbf{A}}(a, -) \overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}} G$ nějaká reprezentace funktoru G. Položme $u := \varphi_a(1_a)$. Protože je φ přirozená transformace, diagram

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{A}}(a, a) \arrow[r, "\varphi_{a}"] \arrow[d, "f_* = \hom_{\mathbf{A}}(a, f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ \hom_{\mathbf{A}}(a, a') \arrow[r, "\varphi_{a'}"] & G(a') \end{tikzcd}$$

komutuje pro každý morfismus $f\colon a \to a'$. Odtud plyne, že

$$\varphi_{a'}(f) = \varphi_{a'}(f_*(1_a)) = G(f)(\varphi_a(1_a)) = G(f)(u). \tag{26}$$

Buď v libovolný prvek množiny $G(a')$. Vzhledem k (26) platí pro morfismus $f'\colon a \to a'$, že $G(f')(u) = v$ právě když $v = \varphi_{a'}(f')$. Protože je $\varphi_{a'}$ izomorfismus, existuje právě jeden takový morfismus f'. Odtud plyne, že $\langle a, u\rangle$ je univerzální objekt funktoru G. Z rovností (26) je vidět, že φ je reprezentace funktoru G definovaná pomocí (25). □

Důsledek 11.4.2. *Funktor $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ je reprezentovatelný právě když má univerzální objekt.*

Lemma 11.4.3 (Yonedovo lemma). *Pro každý funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ a každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$ je předpisem*

$$[\eta\colon \hom_{\mathbf{A}}(a,-) \xrightarrow{\bullet} F] \mapsto \eta_a(1_a) \tag{27}$$

definovaná bijekce

$$y_{\langle a,F\rangle}\colon \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-), F) \to F(a).$$

Důkaz. Pro každou přirozenou transformaci $\eta\colon \hom_{\mathbf{A}}(a,-) \xrightarrow{\bullet} F$ a každý morfismus $f\colon a \to a'$ je diagram

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{A}}(a,a) \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "f_*=\hom_{\mathbf{A}}(a,f)"'] & F(a) \arrow[d, "F(f)"] \\
\hom_{\mathbf{A}}(a,a') \arrow[r, "\eta_{a'}"'] & F(a')
\end{tikzcd}$$

komutativní. To znamená, že $\eta_{a'}(f) = F(f)(\eta_a(1_a))$ a proto prvek $\eta_a(1_a) \in F(a)$ jednoznačně určuje přirozenou transformaci η. To znamená, že je zobrazení $y_{\langle a,F\rangle}$ prosté.

Zvolme libovolný prvek $e \in F(a)$ a pro každý morfismus $f\colon a \to a'$ položme

$$\eta_{a'}(f) = F(f)(e). \tag{28}$$

Potom pro každý morfismus $g\colon a' \to a''$ v $\mathbf{A}$ platí, že

$$F(g)((\eta_{a'})(f)) = F(g)(F(f)(e)) = F(gf)(e) = \eta_{a''}(gf) = \eta_{a''}(g_*(f))$$

a tedy diagram

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{A}}(a,a') \arrow[r, "\eta_{a'}"] \arrow[d, "g_*=\hom_{\mathbf{A}}(a,g)"'] & F(a') \arrow[d, "F(g)"] \\
\hom_{\mathbf{A}}(a,a'') \arrow[r, "\eta_{a''}"'] & F(a')
\end{tikzcd}$$

komutuje. Odtud je vidět, že soubor $\eta := \langle \eta_{a'} \mid a' \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})\rangle$ je přirozenou transformací $\hom_{\mathbf{A}}(a,-) \xrightarrow{\bullet} F$. Dosadíme-li $a' := a$ a $f := 1_a$ do (28), dostaneme, že $e = \eta_a(1_a)$. Proto je $y_{\langle a,F\rangle}$ zobrazením na celou množinu $F(a)$. Ukázali jsme, že $y_{\langle a,F\rangle}$ je izomorfismus. □

Pro každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$ položme $a^* := \hom_{\mathbf{A}}(a,-)$.

Důsledek 11.4.4. *Pro každou dvojici objektů a, b kategorie $\mathbf{A}$ máme izomorfismus*

$$y_{\langle b,a^*\rangle}\colon \operatorname{nat}(b^*, a^*) \xrightarrow{\simeq} \hom_{\mathbf{A}}(a, b).$$

daný předpisem $\eta \mapsto \eta_b(1_b)$.

Pro každý morfismus $f\colon a \to b$ uvažme přirozenou transformaci

$$f^* = \hom_{\mathbf{A}}(f, -)\colon \hom_{\mathbf{A}}(b, -) \xrightarrow{\bullet} \hom_{\mathbf{A}}(a, -).$$

Z rovnosti

$$f_b^*(1_b) = \hom_{\mathbf{A}}(f, b)(1_b) = 1_b f = f,$$

je vidět, že $f^* = y_{b,a^*}^{-1}(f)$. Pro každý funktor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ a každou přirozenou transformaci $\eta\colon \hom_{\mathbf{A}}(a, -) \xrightarrow{\bullet} F$ plyne z definic, že

$$\begin{aligned} y_{\langle b,F\rangle}(\operatorname{nat}(f^*, F)(\eta)) &= y_{\langle b,F\rangle}(\eta \circ f^*) = (\eta \circ f^*)_b(1_b) \\ &= \eta_b(f) = F(f)(\eta_a(1_a)) = F(f)(y_{a,F}(\eta)). \end{aligned}$$

To znamená, že diagram

(29)
$$\begin{tikzcd} \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-), F) \arrow[r, "y_{\langle a,F\rangle}"] \arrow[d, "\operatorname{nat}(f^*,F)"'] & F(a) \arrow[d, "F(f)"] \\ \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(b,-), F) \arrow[r, "y_{\langle b,F\rangle}"'] & F(b) \end{tikzcd}$$

komutuje pro všechna $a, b \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ a všechny funktory $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$.

Buď a objekt kategorie $\mathbf{A}$. Pro každou dvojici funktorů $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$, každou přirozenou transformaci $\lambda\colon F \xrightarrow{\bullet} G$ a každou přirozenou transformaci $\eta \hom_{\mathbf{A}}(a, -) \xrightarrow{\bullet} F$ platí, že

$$\begin{aligned} y_{\langle a,G\rangle}(\lambda_*(\eta)) &= y_{\langle a,G\rangle}(\lambda \circ \eta) = (\lambda \circ \eta)_a(1_a) \\ &= \lambda_a(\eta_a(1_a)) = \lambda_a(y_{\langle a,F\rangle}(\eta)). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že diagram

(30)
$$\begin{tikzcd} \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-), F) \arrow[r, "y_{\langle a,F\rangle}"] \arrow[d, "\operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-),\lambda)"'] & F(a) \arrow[d, "\lambda_a"] \\ \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-), G) \arrow[r, "y_{\langle a,G\rangle}"'] & G(a) \end{tikzcd}$$

komutuje pro všechny objekty a kategorie $\mathbf{A}$ a všechny přirozené transformace $\lambda\colon F \xrightarrow{\bullet} G$.

Komutativita diagramů (29) a (30) znamená, že je zobrazení

$$y_{\langle a,F\rangle}\colon \operatorname{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a, -), F) \to F(a)$$

definované přiřazením (27) je přirozené v obou souřadnicích. Na závěr kapitoly formálně popíšeme, co přesně to znamená.

Kartézský součin kategorií $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je kategorie taková, že

- $\operatorname{obj}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \operatorname{obj}(\mathbf{A}) \times \operatorname{obj}(\mathbf{B})$,

- $\mathrm{mor}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathrm{mor}(\mathbf{A}) \times \mathrm{mor}(\mathbf{B})$

a domain, kodomain a skládání morfismů jsou definovány po složkách.

Uvažme dvojici funktorů $N, E\colon \mathbf{A} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{Set}$ definovaných na objektech a morfismech kategorie $\mathbf{A} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$ takto:

- Pro objekt $\langle a, F\rangle$ položíme

  $$N(\langle a, F\rangle) := \mathrm{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a, -), F) \quad \text{a} \quad E(\langle a, F\rangle) := F(a).$$

- Pro morfismus $\langle f, \lambda\rangle : \langle a, F\rangle \to \langle b, G\rangle$ definujeme

  $$N(\langle f, \lambda\rangle) := \mathrm{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a, -), \lambda) \circ \mathrm{nat}(f^*, F)\colon \eta \mapsto \lambda \circ \eta \circ f^*,$$
  $$E(\langle f, \lambda\rangle) := \lambda_b \circ F(f) = G(f) \circ \lambda_a.$$

Z Yonedova lemmatu a komutativity diagramů (29) a (30) dostaneme, že

Věta 11.4.5. *Buď $\mathbf{A}$ libovolná kategorie. Soubor*

$$y := \left\langle y_{\langle a,F\rangle\colon\ \mathrm{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-),F)\to F(a)} \mid \langle a, F\rangle \in \mathrm{obj}(\mathbf{A} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{A}})\right\rangle$$

zobrazení definovaných předpisy (27) je přirozeným izomorfismem $y\colon N \overset{\bullet}{\xrightarrow{\sim}} E$.

To znamená, že jsou všechny $y_{\langle a,F\rangle}$ izomorfismy, a že diagramy

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(a,-),F) \arrow[r, "y_{\langle a,F\rangle}"] \arrow[d, "N(f,\lambda)"'] & F(a) \arrow[d, "E(f,\lambda)"] \\
\mathrm{nat}(\hom_{\mathbf{A}}(b,-),G) \arrow[r, "y_{\langle b,G\rangle}"'] & G(b)
\end{tikzcd}$$

komutují pro všechny morfismy $\langle f, \eta\rangle : \langle a, F\rangle \to \langle b, G\rangle$ v kategorii $\mathbf{A} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$.

KAPITOLA 12

Adjunkce

ABSTRAKT. *Ukážeme, že pro každý morfismus f indukují* hom-*funktory přirozené transformace f_* a f^*. Definujeme adjunkci z kategorie $\mathbf{X}$ do kategorie $\mathbf{A}$ sestávající z dvojice opačných funktorů $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ a $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$ a izomorfismů $\varphi_{x,a}\colon \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a) \to \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a))$ přirozeného v obou souřadnicích. Ukážeme, že adjunkce umožní sestrojit přirozenou transformaci $\eta\colon I_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\bullet} GF$ složenou z univerzálních morfismů z objektů kategorie $\mathbf{X}$ do funktoru G a přirozenou transformaci $\eta\colon FG \xrightarrow{\bullet} I_{\mathbf{A}}$ složenou z univerzálních morfismů z funktoru F do objektů kategorie $\mathbf{A}$. Nakonec ukážeme, že adjunkce je každou z těchto přirozených transformací určena.*

12.1. Přirozená transformace indukovaná hom-funktory

Pro každou dvojici *kontravariantních* funktorů $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ definujeme přirozenou transformaci $\eta\colon F \xrightarrow{\bullet} G$ jako soubor morfismů $\eta_a\colon F(a) \to G(a)$, $a \in \mathbf{A}$, v kategorii $\mathbf{B}$ takových, že pro každý morfismus $f\colon a \to b$ v kategorii $\mathbf{A}$ diagram

$$\begin{tikzcd} F(b) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_b"'] & F(a) \arrow[d, "\eta_a"] \\ G(b) \arrow[r, "G(f)"'] & G(a) \end{tikzcd}$$

v kategorii $\mathbf{B}$ komutuje.

Můžeme tak uvážit kategorii všech kontravariantních funktorů $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, kterou budeme značit $\textbf{ko-B}^{\mathbf{A}}$.

Buď $\mathbf{A}$ libovolná kategorie. Konstrukce hom-množin indukuje dvojici funktorů: kontravariantní funktor $\mathbf{A} \to \textbf{ko-Set}^{\mathbf{A}}$ a kovariantní funktor $\mathbf{A} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$. Ten kontravariantní přiřadí

- objektu a kategorie $\mathbf{A}$ funktor $a^* := \hom_{\mathbf{A}}(a, -)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ a
- morfismu $f\colon a \to b$ přirozenou transformaci

$$f^* = \hom_{\mathbf{A}}(f, -)\colon \hom_{\mathbf{A}}(b, -) \xrightarrow{\bullet} \hom_{\mathbf{A}}(a, -).$$

Složky přirozené transformace f^* jsou zobrazení

$$\begin{aligned} (f^*)_y = \hom_{\mathbf{A}}(f, y)\colon \hom_{\mathbf{A}}(b, y) &\to \hom_{\mathbf{A}}(a, y), \qquad (y \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})),\\ g &\mapsto gf. \end{aligned}$$

Index y se při značení obvykle vynechává a píše se f^* místo formálně správného $(f^*)_y$. To také odpovídá značení, které jsme dosud používali.

Druhý kovariantní funktor $\mathbf{a} \to \textbf{ko-Set}^{\mathbf{A}}$ je dán přiřazeními

- $a \mapsto a_* := \hom_{\mathbf{A}}(-, a)\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$,
- $f \mapsto f_* := \hom_{\mathbf{A}}(-, f)\colon\ \hom_{\mathbf{A}}(-, a) \xrightarrow{\bullet} \hom_{\mathbf{A}}(-, b)$,

kde a ja objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $f\colon a \to b$ morfismus v kategorii $\mathbf{A}$. Takto definovaná $f_* = \langle (f_*)_x = \hom_{\mathbf{A}}(x, f) \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\rangle$ je přirozenou transformací kontravariantních funktorů. Ve shodě s předešlými kapitolami budeme opět používat značení f_* místo $(f_*)_y$ také pro složky této přirozené transformace.

12.2. Adjunkce - definice a příklady

Uvažme dvojici kategorií $\mathbf{X}$ a $\mathbf{A}$. *Adjunkce* z $\mathbf{X}$ do $\mathbf{A}$ je trojice $\langle F, G, \varphi\rangle$, kde $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ a $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$ jsou funktory a

$$\varphi := \langle \varphi_{x,a} \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X}) \text{ a } a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\rangle$$

je soubor bijekcí

$$\varphi_{x,a}\colon\ \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a) \xrightarrow{\simeq} \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a)),$$

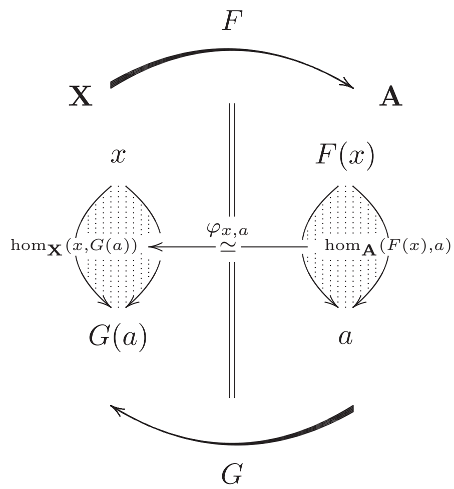
kde x značí objekty kategorie $\mathbf{X}$ a a objekty kategorie $\mathbf{A}$. Navíc požadujeme, aby φ bylo přirozené v obou souřadnicích x a a. To znamená, že pro každý morfismus $f\colon y \to x$ v kategorii $\mathbf{X}$ a každý morfismus $g\colon a \to b$ v kategorii $\mathbf{A}$ diagramy

(31)
$$\begin{tikzcd} x \\ y \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "F(f)^*"'] & \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a)) \arrow[d, "f^*"] \\ \hom_{\mathbf{A}}(F(y), a) \arrow[r, "\varphi_{y,a}"'] & \hom_{\mathbf{X}}(y, G(a)) \end{tikzcd}$$

a

(32)
$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "g"'] \\ b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "g_*"'] & \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a)) \arrow[d, "G(g)_*"] \\ \hom_{\mathbf{A}}(F(x), b) \arrow[r, "\varphi_{x,b}"'] & \hom_{\mathbf{X}}(x, G(b)) \end{tikzcd}$$

komutují.



Adjunkce $\langle F, G, \varphi\rangle \colon \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$

Komutativita diagramu (31) znamená, že

$$\varphi_{x,a}(h) \circ f = \varphi_{y,a}(h \circ F(f)), \tag{33}$$

pro všechna $f \in \hom_{\mathbf{X}}(y, x)$, $a \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ a $h \in \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a)$. Komutativity diagramu (32) je ekvivalentní s rovností

$$G(g) \circ \varphi_{x,a}(h) = \varphi_{x,b}(g \circ h), \tag{34}$$

pro všechna $x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})$, $g \in \hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ a $h \in \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a)$.

Kombinací (33) a (34) dostaneme rovnost

$$G(g) \circ \varphi_{x,a}(h) \circ f = \varphi_{y,b}(g \circ h \circ F(f)), \tag{35}$$

pro všechna $f \in \hom_{\mathbf{X}}(y, x)$, $g \in \hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ a $h \in \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a)$. Naopak z rovnosti (35) dostaneme rovnost (33) (resp. (34)) tak, že položíme $a = b$ a $g = 1_a$ (resp. $x = y$ a $f = 1_x$).

Definice. Adjunkci z $\mathbf{X}$ do $\mathbf{A}$ budeme značit $\langle F, G, \varphi\rangle \colon \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$. Funktor F budeme nazývat *levý adjunkt* funktoru G a naopak funktor G budeme nazývat *pravý adjunkt* funktoru F.

Příklad 12.2.1. *Uvažme zapomínající funktor $U \colon$ **Grp** $\to$ **Set** z kategorie grup do kategorie množin. Dále uvažme funktor $F \colon$ **Set** $\to$ **Grp**, který množině X přiřadí volnou grupu $F(X)$ všech redukovaných slov nad X s volnou bazí X a zobrazení $f \colon X \to Y$ jeho jednoznačné rozšíření na grupový homomorfismus $F(f) \colon F(X) \to F(Y)$. K ověření, že tato dvojice funktorů tvoří adjunkci z kategorie grup do kategorie množin využijeme následující vlastností volné grupy $F(X)$ s bází X:*

> *Pro každou grupu G a každé zobrazení $X \to G = U(G)$ existuje právě jedno rozšíření tohoto zobrazení na grupový homomorfismus $F(X) \to G$.*

Odtud je vidět, že zobrazení

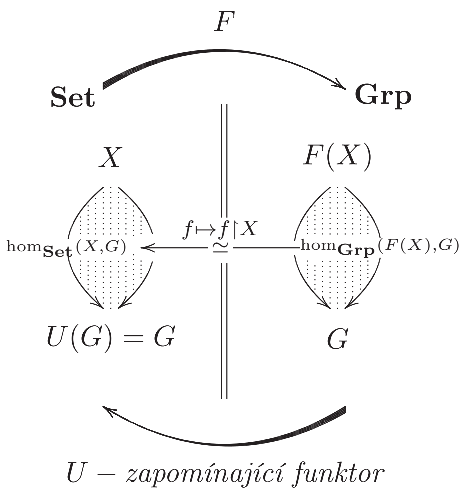
$$\begin{aligned}\varphi_{X,G}\colon \hom_{\mathbf{Grp}}(F(X), G) &\to \hom_{\mathbf{Set}}(X, U(G)),\\ h &\mapsto h \restriction X,\end{aligned}$$

které grupovému homomorfismu $f\colon F(X) \to G$ přiřadí jeho restrikci na množinu X, je bijekcí.

Ukážeme, že platí (35). *Symbolem U si označíme uvažovaný zapomínající funktor z kategorie grup do kategorie množin. Všimněme si, že $U(g) = g$ pro každý grupový homomorfismus g. Nyní snadno nahlédneme, že pro každé $f \in \hom_{\mathbf{Set}}(Y, X)$, $g \in \hom_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ a každé $h \in \hom_{\mathbf{Grp}}(F(X), G)$ platí rovnost*

$$\begin{aligned}U(g) \circ \varphi_{X,G}(h) \circ f &= g \circ (h \restriction X) \circ f = g \circ h \circ f\\ &= (g \circ h \circ F(f)) \restriction Y = \varphi_{Y,H}(g \circ h \circ F(f)).\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že trojice $\langle F, U, \varphi\rangle$ tvoří adjunkci $\mathbf{Grp} \rightharpoonup \mathbf{Set}$.



Adjunkce $\langle F, U, \varphi\rangle\colon \mathbf{Grp} \rightharpoonup \mathbf{Set}$

Příklad 12.2.2. *Připomeňme, že* komutátor *grupy G je její podgrupa G' generovaná množinou*

$$\left\{[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\right\}.$$

Všimněme si, že $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$, pro všechna $x, y, z \in G$. Odtud plyne, že G' je normální podgrupou grupy G. Označme $p_G\colon G \to G/G'$ kanonickou projekci na faktorgrupu G/G'. Vzhledem k [**4**, Theorem 2.23] *je pro každou $N \trianglelefteq G$ faktorová grupa G/N abelovská právě když $G' \leq N$. Odtud a z Věty o homomorfismu plyne, že* *pro každý homomorfismus $h\colon G \to A$ do Abelovy grupy A existuje právě jeden homomorfismus $h'\colon G/G' \to A$ splňující $h = h' \circ p_G$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_G"'] & A \\ G/G' \arrow[ur, dotted, "\exists! h'"'] & \end{tikzcd}$$

Proto je zobrazení

$$\begin{aligned} \varphi_{G,A}\colon \hom_{\mathbf{AbG}}(G/G', A) &\to \hom_{\mathbf{Grp}}(G/G', A), \\ h &\mapsto p_G \circ h \end{aligned} \tag{36}$$

bijekcí pro každou grupu G a každou Abelovu grupu A.[1]

Buď $F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{AbG}$ funktor takový, že $F(G) := G/G'$ pro každou grupu G a $F(f) := (\pi_H \circ f)'$ pro každý grupový homomorfismus $f\colon G \to H$. (Tj., $F(f)$ jednoznačně určený homomorfismus Abelových grup takový, že čtverec

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_G"'] & H \arrow[d, "p_H"] \\ G/G' \arrow[r, dotted, "F(f)"'] & H/H' \end{tikzcd}$$

komutuje.) Symbolem I označme funktor inkluze $\mathbf{AbG} \to \mathbf{Grp}$. Položme

$$\varphi := \langle \varphi_{G,A} \mid G \text{ je grupa a } A \text{ je Abelova grupa} \rangle .$$

Pro všechny grupové homomorfismy $f\colon H \to G$ a všechny homomorfismy $g\colon A \to B$ a $h\colon F(G) \to H$ Abelových grup je diagram

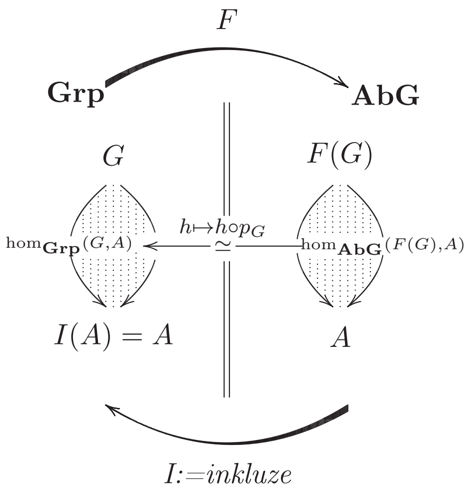
$$\begin{tikzcd} & G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_G"'] \arrow[ddl, phantom, ""] & H \arrow[d, "p_H"] & \\ \varphi_{G,B}(g\circ h\circ F(f)) & F(G) \arrow[r, "F(f)"'] & F(H) \arrow[d, "h"] & \varphi_{H,A}(h) \\ & B & A \arrow[l, "g=I(G)"'] & \end{tikzcd}$$

komutativní. Odtud je vidět, že

$$\varphi_{G,B}(g \circ h \circ F(f)) = I(G) \circ \varphi_{H,A}(h) \circ f.$$

Ukázali jsme, že trojice $\langle F, I, \varphi \rangle$ tvoří adjunkci $\mathbf{Grp} \to \mathbf{AbG}$.

[1] Stejně jako v předchozích přednáškách značíme symbolem **AbG** kategorii všech Abelových grup.



Adjunkce $\langle F, I, \varphi \rangle \colon \mathbf{Grp} \rightharpoonup \mathbf{AbG}$

12.3. Jednotka a kojednotka adjunkce

Věta 12.3.1. *Adjunkce* $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ *určuje přirozenou transformaci* $\eta \colon I_{\mathbf{X}} \overset{\bullet}{\to} GF$ *(z identického funktoru* $I_{\mathbf{X}} \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$*) takovou, že pro každý objekt* x *kategorie* $\mathbf{X}$ *je* η_x *univerzální morfismus z* x *do* G.

Důkaz. Pro každé $x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X})$ položme

$$\eta_x := \varphi_{x,F(x)}(1_{F(x)}). \tag{37}$$

Buď a libovolný objekt kategorie $\mathbf{A}$ a $f \colon x \to G(a)$. Všimněme si, že pro každý morfismus $g \colon F(x) \to a$ platí, že

$$G(g) \circ \eta_x = G(g) \circ \varphi_{x,F(x)}(1_{F(x)}) = \varphi_{x,a}(g \circ 1_{F(x)}) = \varphi_{x,a}(g).$$

Odtud plyne, že

$$f = G(g) \circ \eta_x \quad \text{právě když} \quad g = \varphi^{-1}_{x,a}(g).$$

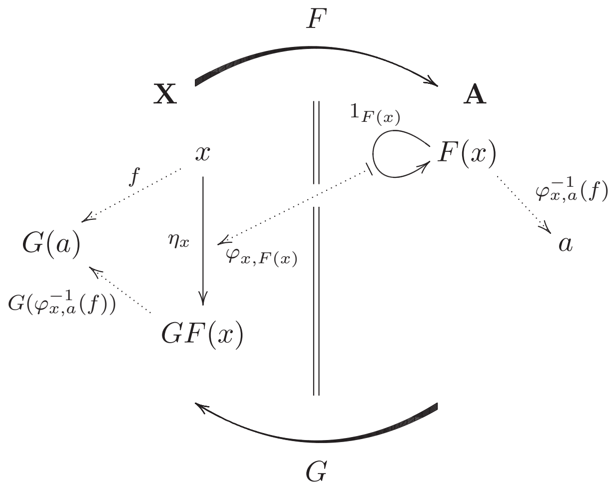
Z toho, že $\varphi_{x,a}$ je bijekce, je vidět, že existuje právě jedno takové g. Podle definice je η_x univerzálním morfismem z x do G.

Zbývá ověřit, že soubor $\eta := \langle \eta_x \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X}) \rangle$ tvoří přirozenou transformací $I_{\mathbf{X}} \overset{\bullet}{\to} GF$. Pro každý morfismus $f \colon x \to y$ v kategorii X plyne z rovností (33) a (34), že

$$\begin{aligned} GF(f) \circ \eta_X &= GF(f) \circ \varphi_{x,F(x)}(1_{F(x)}) = \varphi_{x,F(x)}(F(f) \circ 1_{F(x)}) \\ &= \varphi_{x,F(x)}(1_{F(y)} \circ F(f)) = \varphi_{y,F(y)}(1_{F(y)}) \circ f = \eta_y \circ f. \end{aligned}$$

To dokazuje, že η tvoří přirozenou transformaci. $\square$

Na obrázku si znázorníme konstrukci jednotky adjunkce a korespondence pomocí nichž lze ukázat její univerzalitu z objektů kategorie $\mathbf{X}$ do funktoru G.



Jednotka adjunkce η

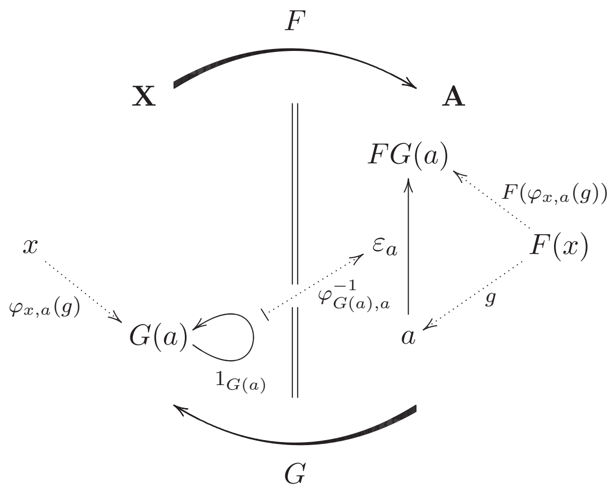
Podobně ukážeme duální tvrzení:

VĚTA 12.3.2. *Buď $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ adjunkce. Předpisy*

$$\varepsilon_a := \varphi^{-1}_{G(a),a}(1_{G(a)}), \qquad (a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})), \tag{38}$$

je definována přirozená transformace $\varepsilon \colon FG \xrightarrow{\bullet} I_{\mathbf{A}}$ (do identického funktoru $I_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$) taková, že pro každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$ je ϵ_a univerzální morfismus z F do a.

Také v duálním případě si situaci znázorníme graficky.



Kojednotka adjunkce ε

Definice. Přirozené transformace $\eta\colon I_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\bullet} GF$ (resp. $\varepsilon\colon FG \xrightarrow{\bullet} I_{\mathbf{A}}$) určené předpisy (37) (resp. (38)) nazýváme *jednotkou* (resp. *kojednotkou*) adjunkce $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$.

Předpokládejme, že jsou dány funktor $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, zobrazení $F\colon \operatorname{obj}(\mathbf{X}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ a soubor $\eta := \langle \eta_x\colon x \to GF(x) \mid x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})\rangle$ takový, že $\langle GF(x), \eta_x\rangle$ je univerzální morfismus z x do F pro každé $x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})$. Z univerzality morfismů η_x plyne, že pro každý morfismus $f\colon x \to y$ v kategorii $\mathbf{X}$ existuje právě jeden morfismus $f'\colon F(x) \to F(y)$ takový, že

$$G(f') \circ \eta_x = \eta_y \circ f \tag{39}$$

Pro každý morfismus $f\colon x \to y$ v $\mathbf{X}$ proto můžeme jednoznačně definovat

$$F(f) := f'. \tag{40}$$

Lemma 12.3.3. *Takto definované zobrazení určuje funktor $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{A}$.*

Důkaz. Důkaz spočívá v přímočarém ověření vlastností funktoru. Přímo z definice je vidět, že $\operatorname{dom} F(f) = F(\operatorname{dom} f)$ a $\operatorname{cod} F(f) = F(\operatorname{cod} f)$ pro každý morfismus f v kategorii $\mathbf{X}$. Protože je G funktor, platí pro každý objekt x kategorie $\mathbf{X}$, že

$$\eta_x \circ 1_x = \eta_x = 1_{GF(x)} \circ \eta_x = G(1_{F(x)}) \circ \eta_x.$$

Z jednoznačnosti morfismu určeného předpisem (39) plyne, že $F(1_x) = 1_{F(x)}$. Nakonec nechť $f\colon x \to y$ a $g\colon y \to z$ jsou dva morfismy v kategorii $\mathbf{X}$, které lze skládat. Potom dostaneme, že

$$G(F(g) \circ F(f)) \circ \eta_x = GF(g) \circ GF(f) \circ \eta_x = GF(g) \circ \eta_y \circ f = \eta_z \circ (g \circ f).$$

Opět z jednoznačnosti morfismu definovaného předpisem (39) dostaneme, že $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Proto je F funktor. □

Všimněme si, že z rovnosti (39) a následné definice (40) plyne komutativita diagramu

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_x"'] & y \arrow[d, "\eta_y"] \\ GF(x) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(y) \end{tikzcd} \tag{41}$$

pro každý morfismus $f\colon x \to y$. To znamená, že η je přirozenou transformací $I_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\bullet} GF$.

Věta 12.3.4. *Předpokládejme, že jsou dány funktor $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, zobrazení $F\colon \operatorname{obj}(\mathbf{X}) \to \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ a soubor $\eta := \langle \eta_x\colon x \to GF(x) \mid x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})\rangle$ takový, že $\langle GF(x), \eta_x\rangle$ je univerzální morfismus z x do F pro každé $x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})$. Předpisem (40) rozšíříme zobrazení F na funktor $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$ a pro každou dvojici objektů $x \in \operatorname{obj}(\mathbf{X})$ a $a \in \operatorname{obj}(\mathbf{A})$ definujeme zobrazení*

$$\begin{aligned} \varphi_{x,a}\colon \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a) &\to (x, G(a)) \\ h &\mapsto G(h) \circ \eta_x \end{aligned} \tag{42}$$

a položíme $\varphi := \langle \varphi_{x,a} \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X}),\ a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\rangle$.

Potom je $\langle F, G, \varphi\rangle$ *adjunkce* $\mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ *a* η *je její jednotkou.*

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X})$ a $a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})$. Z univerzality morfismů $\eta_x\colon x \to GF(x)$ plyne, že pro každé $f \in \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a))$ existuje právě jedno $f' \in \hom_{\mathbf{A}}(F(x), a)$ takové, že

$$f = G(f) \circ \eta_x = \varphi_{x,a}(f').$$

Odtud je vidět, že jsou zobrazení $\varphi_{x,a}$ bijekcemi. Zbývá ověřit, že $\varphi_{x,a}$ jsou přirozené v obou souřadnicích. K tomu stačí ověřit, že rovnost (35) platí pro všechna $f \in \hom_{\mathbf{X}}(y, x)$, $g \in \hom_{\mathbf{A}}(a, b)$ a $h \in \hom_{\mathbf{X}}(F(x), a)$. To lze snadno z komutativity diagramu (41):

$$\begin{aligned}\varphi_{y,b}(g \circ h \circ F(f)) &= G(gh) \circ \underbrace{GF(f) \circ \eta_y}_{\eta_x \circ f} \\ &= G(g) \circ G(h) \circ \eta_x \circ f = G(g) \circ \varphi_{x,a}(h) \circ f.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že předpis (42) určuje adjunkci $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$.

Pro každý objekt x kategorie $\mathbf{X}$ plyne z definice (42), že

$$\eta_x = 1_{GF(x)} \circ \eta_x = G(1_{F(x)}) \circ \eta_x = \varphi_{x,F(x)}(1_{F(x)}).$$

Proto je přirozená transformace η jednotkou této adjunkce. □

Všimněme si, že je-li η jednotka adjunkce $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$, jsou bijekce $\varphi_{x,a}$ určeny předpisy (42). Odtud je vidět, že

Tvrzení 12.3.5. *Adjunkce* $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ *je určena funktory* F, G *a svojí jednotkou* η.

Ukažme si ještě, že pokud existuje levý adjunkt funktoru $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, je určen jednoznačně až na přirozený izomorfismus.

Tvrzení 12.3.6. *Každé dva levé adjunkty funktoru* $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{X}$ *jsou přirozeně izomorfní.*

Důkaz. Nechť $\langle F, G, \varphi\rangle$ a $\langle F', G, \varphi'\rangle$ je dvojice adjunkcí $\mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ a nechť η a η' jsou jejich jednotky. Buď x objekt kategorie $\mathbf{X}$. Protože je η_x univerzální morfismus z x do G, existuje právě jeden morfismus $\iota_X : F(x) \to F'(x)$ takový, že $\eta'_x = G(\iota_x) \circ \eta_x$. Podobně z univerzality morfismu η'_x (z x do G) plyne, že existuje právě jeden morfismus $\iota'_x\colon F'(x) \to F(x)$ takový, že $\eta_x = G(\iota'_x) \circ \eta'_x$. Odtud plyne, že

$$\begin{aligned}\varphi_{x,F(x)}(\iota'_x \circ \iota_x) &= G(\iota'_x \circ \iota_x) \circ \eta_x = G(\iota'_x) \circ \eta'_x = \eta_x = \varphi_{x,F(x)}(1_{F(x)}),\\ \varphi_{x,F'(x)}(\iota_x \circ \iota'_x) &= G(\iota_x \circ \iota'_x) \circ \eta'_x = G(\iota_x) \circ \eta_x = \eta'_x = \varphi_{x,F'(x)}(1_{F'(x)}).\end{aligned}$$

Protože jsou $\varphi_{x,F(x)}$ a $\varphi_{x,F'(x)}$ bijekce, dostaneme rovnosti

$$\iota'_x \circ \iota_x = 1_{F(x)} \quad \text{a} \quad \iota_x \circ \iota'_x = 1_{F(x')}.$$

Proto jsou ι_x a ι'_x vzájemně inverzní izomorfismy.

Zbývá ukázat, že $\iota := \langle \iota_x \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X}) \rangle$ je přirozenou transformací $F \overset{\bullet}{\to} F'$. To znamená, že pro každý morfismus $f\colon x \to y$ v kategorii $\mathbf{X}$ je diagram

(43)
$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\iota_x"'] & F(y) \arrow[d, "\iota_y"] \\ F'(x) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(y) \end{tikzcd}$$

komutativní.

Z toho, že jsou η a η' přirozené transformace a z definice morfismů ι_x plyne, že komutují oba sousední lichoběžníky a horní a dolní trojúhelník v diagramu

$$\begin{tikzcd} GF(x) \arrow[rr, "G(\iota_x)"] \arrow[dd, "GF(f)"'] & & GF'(x) \arrow[dd, "GF'(f)"] \\ & x \arrow[ul, "\eta_x"'] \arrow[ur, "\eta'_x"] \arrow[d, "f"] & \\ & y \arrow[dl, "\eta_y"'] \arrow[dr, "\eta'_y"] & \\ GF(y) \arrow[rr, "G(\iota_y)"'] & & GF'(y). \end{tikzcd}$$

Proto platí, že

$$\begin{aligned} \varphi_{x,F'(y)}(\iota_y \circ F(f)) &= G(\iota_y \circ F(f)) \circ \eta_x \\ &= G(F'(f) \circ \iota_x) \circ \eta_x = \varphi_{x,F'(y)}(F'(f) \circ \iota_x). \end{aligned}$$

Protože je $\varphi_{x,F'(y)}\colon \hom_{\mathbf{A}}(F(x), F(y')) \to \hom_{\mathbf{X}}(x, GF(y'))$ bijekce, plyne odtud rovnost

$$\iota_y \circ F(f) = F'(f) \circ \iota_x.$$

To znamená, že diagram (43) komutuje. □

Duálně ukážeme, že adjunkce je určena levým adjunktem, restrikcí pravého objektu na objekty a svojí kojednotkou a že pravý adjunkt k danému funktoru je určen jednoznačně až na přirozený izomorfismus.

Jsou-li dány funktor $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{A}$, zobrazení $G\colon \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \to \mathrm{obj}(\mathbf{X})$ a soubor $\varepsilon := \langle \varepsilon_a\colon FG(a) \to a \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \rangle$ takový, že $\langle FG(a), \varepsilon_a \rangle$ je univerzální morfismus z G do a pro každý objekt a kategorie $\mathrm{obj}(\mathbf{A})$. Rozšíříme-li zobrazení G na objekty kategorie $\mathbf{A}$ tak, že morfismu $g\colon a \to b$ přiřadíme morfismus $G(g)\colon G(a) \to G(b)$ takový, že diagram

$$\begin{tikzcd} FG(a) \arrow[r, "FG(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_a"'] & FG(b) \arrow[d, "\varepsilon_b"] \\ a \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

komutuje. Protože je ε_b univerzální morfismus z b do G, takový morfismus existuje a je jednoznačně určený. Dále platí, že

Věta 12.3.7. *Rozšířením zobrazení G na morfismy kategorie $\mathbf{A}$ dostaneme funktor $\mathbf{A} \to \mathbf{X}$. Zobrazení*

$$\begin{aligned} \psi_{a,x}\colon \hom_{\mathbf{X}}(x, G(a)) &\to (F(x), a) \\ h &\mapsto \varepsilon_a \circ F(h) \end{aligned}$$

definovaná pro každou dvojici objektů $x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X})$ a $a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})$ jsou bijekcemi. Položíme-li $\varphi_{x,a} := \psi_{a,x}^{-1}$ a

$$\varphi := \langle \varphi_{x,a} \mid x \in \mathrm{obj}(\mathbf{X}),\ a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \rangle \,,$$

dostaneme adjunkci $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$. Navíc je soubor ε kojednotkou této adjunkce.

Tvrzení 12.3.8. *Adjunkce $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{X} \rightharpoonup \mathbf{A}$ je určena funktory F, G a svojí kojednotkou ε.*

Tvrzení 12.3.9. *Každé dva pravé adjunkty funktoru $F\colon \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ jsou přirozeně izomorfní.*

Konkrétně nechť $\langle F, G, \varphi \rangle$ a $\langle F, G', \varphi' \rangle$ jsou adjunkce $\mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{X}$ s kojednotkami ε a ε'. Pro každý objekt a kategorie $\mathbf{A}$ existuje právě jeden morfismus $\upsilon_a\colon G(a) \to G'(a)$ takový, že diagram

$$\begin{tikzcd} FG(a) \arrow[rr, "F(\upsilon_a)"] \arrow[dr, "\varepsilon_a"'] & & FG'(a) \arrow[dl, "\varepsilon'_a"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

komutuje. Soubor $\upsilon := \langle \upsilon_a \mid a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \rangle$ je přirozeným izomorfismem $\upsilon\colon G \overset{\bullet}{\to} G'$.

Příklad 12.3.1. *Buď $\mathbf{A}$ kategorie. Uvažme diagonální funktor $\Delta\colon \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ definovaný takto:*

- *$\Delta(a) := \langle a, a \rangle$ pro každý objekt kategorie $\mathbf{A}$,*
- *$\Delta(f) := \langle f, f \rangle$ pro každý morfismus v kategorii $\mathbf{A}$.*

Předpokládejme, že kategorie $\mathbf{A}$ má konečné kosoučiny a uvažme zobrazení

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{obj}(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) &\to \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \\ \langle x, y \rangle &\mapsto x \amalg y, \end{aligned}$$

kde $\langle x \amalg y, \langle q_x, q_y \rangle \rangle$ je kosoučin objektů x, y. Z vlastností kosoučinu plyne, že $\eta_{\langle x,y \rangle} = \langle q_x, q_y \rangle : \langle x, y \rangle \to \langle x \amalg y, x \amalg y \rangle$ jsou univerzální morfismy z objektů $\langle x, y \rangle$ do funktoru Δ. Pro každý morfismus $\langle f, g \rangle : \langle x, y \rangle \to \langle w, z \rangle$ existuje *právě jeden morfismus (označme jej $f \amalg g\colon x \amalg y \to w \amalg z$) takový, že diagramy*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_x"'] & w \arrow[d, "q_w"] \\ x \amalg y \arrow[r, dotted, "f \amalg g"'] & w \amalg z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q_y"'] & z \arrow[d, "q_z"] \\ x \amalg y \arrow[r, dotted, "f \amalg g"'] & w \amalg z \end{tikzcd}$$

komutují. Položíme-li $F(\langle f, g\rangle) = f \amalg g$ dostaneme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} \langle x, y\rangle \arrow[r, "\langle f,g\rangle"] \arrow[d, "\langle q_x, q_y\rangle"'] & \langle w, z\rangle \arrow[d, "\langle q_w, q_z\rangle"] \\ \langle x \amalg y, x \amalg y\rangle \arrow[r, "(\Delta\circ F)(\langle f,g\rangle)"'] & \langle w \amalg z, w \amalg z\rangle \end{tikzcd}$$

Z Věty 12.3.4 plyne, že funktor F (kosoučinu) je levým adjunktem diagonálního funktoru Δ. Odpovídající adjunkce je $\langle F, \Delta, \varphi\rangle : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A}$, kde $\varphi := \big\langle \varphi_{\langle x,y\rangle,a} \mid \langle x, y\rangle \in \mathrm{obj}(\mathbf{A} \times \mathbf{A}), a \in \mathrm{obj}(\mathbf{A})\big\rangle$ je soubor zobrazení

$$\begin{aligned} \varphi_{\langle x,y\rangle,a}\colon\ \hom_{\mathbf{A}}(x \amalg y, a) &\to \hom_{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}(\langle x, y\rangle, \Delta(a)) \\ h &\mapsto \Delta(h) \circ \langle q_x, q_y\rangle = \langle h \circ q_x, h \circ q_y\rangle . \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že kategorie $\mathbf{A}$ má konečné součiny a uvažme zobrazení

$$\begin{aligned} G\colon\ \mathrm{obj}(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) &\to \mathrm{obj}(\mathbf{A}) \\ \langle a, b\rangle &\mapsto a \times b, \end{aligned}$$

kde $\langle a \times b, \langle p_a, p_b\rangle\rangle$ je součin objektů a, b. Z vlastností součinu plyne, že $\varepsilon_{\langle a,b\rangle} = \langle p_a, p_b\rangle : \langle a \times b, a \times b\rangle \to \langle a, b\rangle$ jsou univerzální morfismy z funktoru Δ do objektů $\langle a, b\rangle$ kategorie $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Pro každé $\langle f, g\rangle : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ existuje právě jeden morfismus (nyní jej označíme $f \times g\colon a \times b \to c \times d$) v kategorii $\mathbf{A}$ takový, že diagramy

$$\begin{tikzcd} a \times b \arrow[r, dotted, "f\times g"] \arrow[d, "p_a"'] & c \times d \arrow[d, "p_c"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \times b \arrow[r, dotted, "f\times g"] \arrow[d, "p_b"'] & c \times d \arrow[d, "p_d"] \\ b \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

komutují. Položíme-li $G(\langle f, g\rangle) = f \times g$, dostaneme komutativní diagram

$$\begin{tikzcd} \langle a \times b, a \times b\rangle \arrow[r, "(G\circ\Delta)(\langle f,g\rangle)"] \arrow[d, "\langle p_a, p_b\rangle"'] & \langle c \times d, c \times d\rangle \arrow[d, "\langle p_c, p_d\rangle"] \\ \langle a, b\rangle \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & \langle c, d\rangle \end{tikzcd}$$

Z Věty 12.3.7 plyne, že funktor G (součinu) je pravým adjunktem diagonálního funktoru Δ. Odpovídající adjunkce je $\langle \Delta, G, \psi\rangle : \mathbf{A} \rightharpoonup \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, kde

$$\psi := \left\langle \psi_{x,\langle a,b\rangle} \mid x \in \operatorname{obj}(\mathbf{A}), \langle a,b\rangle \in \operatorname{obj}(\mathbf{A}\times\mathbf{A}) \right\rangle \textit{ je soubor zobrazení}$$

$$\begin{aligned} \psi_{x,\langle a,b\rangle}\colon \hom_{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}(\Delta(x), \langle a,b\rangle) &\to \hom_{\mathbf{A}}(x, a\times b) \\ h &\mapsto \langle p_a, p_b\rangle \circ \Delta(h) = \langle p_a \circ h, p_b \circ h\rangle\,. \end{aligned}$$

Děkuji Mariánu Popperovi a Martinu Žuravovi za připomínky k textům. Dále děkuji Barboře Hudcové za zapůjčení zápisků.

Literatura

1. Ladislav Procházka a kol., *Algebra*, Academia, Praha, 1990.
2. Ryszard Engelking, *General Topology*, Revised and completed ed., Sigma Series in Pure Mathematics, Helderman Verlag, Berlin, 1989.
3. Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Second ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.
4. Joseph. J. Rotman, *An introduction to the Theory of Groups*, Fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, NY Berlin Heidelberg, 1991.