TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
9. PŘEDNÁŠKA
Kongruence konečných svazů

Buď P uspořádaná množina a $p < q$ uspořádaná dvojice jejich prvků. Řekneme, že q *pokrývá* p (což značíme $p \prec q$) pokud je

$$\{r \in P \mid p < r < q\} = \emptyset.$$

Všimněme si, že pro každou uspořádanou dvojici $p < q$ v konečné uspořádané množině P existuje $r \in P$ tak, že $p \leq r \prec q$.

Buď t spojově nerozložitelný prvek konečného svazu $\boldsymbol{A}$. Položme

$$t^* := \bigvee \{a \in \boldsymbol{A} \mid a < t\}. \tag{9.1}$$

Protože je prvek t spojově nerozložitelný, platí ostrá nerovnost $t^* < t$. Ihned z definice (9.1) je vidět, že $t^* \prec t$ a $a < t$ právě když $a \leq t^*$, pro všechna $a \in \boldsymbol{A}$. Vidíme, že t^* je jediný prvek svazu $\boldsymbol{A}$, který je pokryt prvkem t.

Předpokládejme naopak, že $t = a \vee b$ pro nějaké $a, b < t$. Protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, existují $a', b' \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq a' \prec t$ a současně $b \leq b' \prec t$. Nutně platí, že $a' \neq b'$, neboť v opačném případě bychom měli, že $a \vee b \leq a' \prec t$, což je ve sporu s předpokladem, že $t = a \vee b$. Dostáváme tak, že

Lemma 9.1. *Prvek t konečného svazu $\boldsymbol{A}$ je spojově nerozložitelný právě když existuje právě jedno $t^* \in \boldsymbol{A}$ takové, že $t^* \prec t$.*

Pro kongruenci Θ konečného svazu $\boldsymbol{A}$ položme

$$J(\Theta) := \{t \in J(\boldsymbol{A}) \mid t \equiv_\Theta t^*\}. \tag{9.2}$$

Buď Θ kongruence svazu $\boldsymbol{A}$. Pro $a, b \in \boldsymbol{A}$ budeme psát $a \leq_\Theta b$ pokud $a \wedge b \equiv_\Theta a$ nebo ekvivalentně $b \equiv_\Theta a \vee b$. Všimněme si, že $a \equiv_\Theta b$ právě když $a \leq_\Theta b$ a současně $b \leq_\Theta a$. For every $a \in \boldsymbol{A}$ we put

$$J(a) := {\downarrow} a \cap J(\boldsymbol{A}).$$

Lemma 9.2. *Pro všechny dvojice a, b prvků konečného svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že*

$$a \leq_\Theta b \quad \textit{právě když} \quad J(a) \setminus J(\Theta) \subseteq J(b) \setminus J(\Theta).$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že $a \leq_\Theta b$ a nechť $t \in J(a) \setminus J(\Theta)$. Potom $t = t \wedge a \leq_\Theta t \wedge b$ a z $t \wedge b \leq t$ plyne, že $t \wedge b \equiv_\Theta t$. Pro spor předpokládejme, že $t \nleq b$. Potom $t \wedge b < t$ a tedy $t \wedge b \leq t^*$. Z $t \wedge b \equiv_\Theta t$

dostaneme, že $t^* \equiv_\Theta t$. To je ve sporu s volbou $t \notin J(\Theta)$. Proto je $t \leq b$ a tedy $t \in J(b) \setminus J(\Theta)$. Ukázali jsme inkluzi $J(a) \setminus J(\Theta) \subseteq J(b) \setminus J(\Theta)$.

($\Leftarrow$) Předpokládejme naopak, že $a \not\leq_\Theta b$ a hledejme prvek z $(J(\boldsymbol{A}) \setminus J(\Theta))$, který je menší nebo roven než a, ale který není menší nebo roven než b. Položme $c = \bigwedge [\,a\,]_\Theta$ (protože je svaz $\boldsymbol{A}$ konečný, je konečná i množina $[\,a\,]_\Theta$ a tedy jistě existuje její průsek). Podle Lemmatu 5.1 je $c = \bigvee Y$ pro nějakou konečnou množinu spojově nerozložitelných prvků svazu $\boldsymbol{A}$. Podle Lemmatu 8.2 existuje minimální pokrytí X prvku c takové, že $X \subseteq {\downarrow} Y$. Protože $c = \bigvee Y$ a $X \subseteq {\downarrow} Y$ platí rovnost $c = \bigvee X$.

Ukážeme, že $X \cap J(\Theta) = \emptyset$. Vyberme libovolný prvek $t \in X$. Podle Lemmatu 5.1 je $t^* = \bigvee Z$ pro nějakou konečnou $Z \subseteq J(\boldsymbol{A})$. Položme $W := Z \cup (X \setminus \{t\})$. Potom $t \notin {\downarrow} W$, a protože $Z \subseteq {\downarrow} t \subseteq {\downarrow} X$, platí ostrá inkluze ${\downarrow} W \subsetneq {\downarrow} X$. Vzhledem k $c = \bigvee X$ a k tomu, že X je minimální pokrytí prvku c, máme $\bigvee W < c$. Protože $c = \bigwedge [\,a\,]_\Theta = \bigwedge [\,c\,]_\Theta$, je $\bigvee W \not\equiv_\Theta c$. Všimněme si, že $\bigvee W = (\bigvee Z) \vee \bigvee (X \setminus \{t\}) = t^* \vee \bigvee (X \setminus \{t\})$. Proto $t^* \not\equiv_\Theta t$, a tedy $t \notin J(\Theta)$.

Protože $a \not\leq_\Theta b$ je nutně $c \not\leq b$ a tedy $t \not\leq b$ pro nějaké $t \in X$. Protože $t \leq \bigvee X = c \leq a$, je $t \in {\downarrow} a \setminus {\downarrow} b$ a protože $t \in X$ a $X \subseteq (J(\boldsymbol{A}) \setminus J(\Theta))$, je $t \in (J(\boldsymbol{A}) \setminus J(\Theta))$. Odtud je vidět, že $J(a) \setminus J(\Theta) \not\subseteq J(b) \setminus J(\Theta)$. $\square$

Důsledek 9.3. *Pro všechny dvojice a, b prvků konečného svazu $\boldsymbol{A}$ platí, že*

$$a \equiv_\Theta b \quad \textit{právě když} \quad J(a) \setminus J(\Theta) = J(b) \setminus J(\Theta).$$

Ideálem grafu $G = \langle V, H \rangle$ budeme rozumět podmnožinu $J \subset V$ takovou, že

$$x \in J \quad \text{a} \quad x \xrightarrow{G} y \implies y \in J,$$

pro všechny vrcholy $x, y \in V$

Je zřejmé, že libovolný průnik a sjednocení ideálů je opět ideál. Proto tvoří všechny ideály grafu G úplný distributivní svaz, který budeme značit $\mathrm{Id}\, G$.

Lemma 9.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Potom je $J(\Theta)$ ideálem grafu $G_{\boldsymbol{A}}$ pro všechny kongruence $\Theta \in \mathrm{Con}\, \boldsymbol{A}$.*

Důkaz. Nechť $s, t \in J(\boldsymbol{A})$ a předpokládejme, že $s \xrightarrow{G_{\boldsymbol{A}}} t$. Potom existuje $a \in \boldsymbol{A}$ tak, že $t \leq s \vee a$ a současně $t \not\leq s^* \vee a$. Pro spor předpokládejme, že existuje kongruence $\Theta \in \mathrm{Con}\, \boldsymbol{A}$ taková, že $s \in J(\Theta)$ a současně $t \notin J(\Theta)$, tj., že $s \equiv_\Theta s^*$ a současně $t \not\equiv_\Theta t^*$. Protože $t \not\leq s^* \vee a$, platí, že $t \wedge (s^* \vee a) < t$ a tedy $t \wedge (s^* \vee a) \leq t^*$. Odtud a z předpokladu $s \equiv_\Theta s^*$ dostáváme, že

$$t = t \wedge (s \vee a) \equiv_\Theta t \wedge (s^* \vee a) \leq t^*,$$

a tedy $t \equiv_\Theta t^*$. To je ve sporu s předpokladem, že $t \notin J(\Theta)$. $\square$

Lemma 9.5. *Buď $\boldsymbol{A}$ konečný svaz. Pro každý ideál J grafu $G_{\boldsymbol{A}}$ definujme relaci $\Theta(J)$ na $\boldsymbol{A}$ takto:*

$$a \equiv_{\Theta(J)} b \quad \textit{právě když} \quad J(a) \setminus J = J(b) \setminus J, \tag{9.3}$$

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$. Relace $\Theta(J)$ je kongruencí svazu $\boldsymbol{A}$.

Důkaz. Z definice je zřejmé, že $\Theta(J)$ je ekvivalencí na množině $\boldsymbol{A}$.

Nechť $a \equiv_{\Theta(J)} b$ v $\boldsymbol{A}$ a $x \in \boldsymbol{A}$. Potom

$$J(x \wedge a) \setminus J = J(x) \cap (J(a) \setminus J) = J(x) \cap (J(b) \setminus J) = J(x \wedge b) \setminus J$$

a tedy $x \wedge a \equiv_{\Theta(J)} x \wedge b$.

Zbývá ukázat, že relace $\Theta(J)$ zachovává spojení. Nechť $t \in J(a \vee x) \setminus J$. Podle Lemmatu 5.1 je každý prvek svazu $\boldsymbol{A}$ spojením spojově nerozložitelných prvků. Proto existují podmnožiny $Y_a, Y_x \subseteq J(\boldsymbol{A})$ takové, že $a = \bigvee Y_a$ a $x = \bigvee Y_x$. Protože $t \leq a \vee x$, je $Y = Y_a \cup Y_x$ pokrytím prvku t obsažené v $\downarrow a \cup \downarrow x$. Podle Lemmatu 8.2 existuje minimální pokrytí X prvku t takové, že $X \subseteq \downarrow Y \subseteq \downarrow a \cup \downarrow x$. Podle Lemmatu 8.3 potom platí, že $s \overset{G_{\boldsymbol{A}}}{\to} t$ pro každé $s \in X$. Protože $t \notin J$ a J je ideál grafu $G_{\boldsymbol{A}}$, platí, že $X \cap J = \emptyset$. Protože $J(a) \setminus J = J(b) \setminus J$, plyne odtud, že $X \subseteq J(b) \cup J(x)$ a tedy $t \leq \bigvee X \leq b \vee x$. Odtud je vidět, že $J(a \vee x) \setminus J \subseteq J(b \vee x) \setminus J$. Symetricky dostaneme opačnou inkluzi $J(b \vee x) \setminus J \subseteq J(a \vee x) \setminus J$. Proto platí, že $a \vee x \equiv_{\Theta(J)} b \vee x$. □

Symbolem $\mathbf{1}_{\boldsymbol{L}}$ budeme značit identický automorfismus svazu $\boldsymbol{L}$.

Věta 9.6. *Zobrazení $J\colon \operatorname{Con} \boldsymbol{A} \to \operatorname{Id} G_{\boldsymbol{A}}$ a $\Theta\colon \operatorname{Id} G_{\boldsymbol{A}} \to \operatorname{Con} \boldsymbol{A}$ jsou vzájemně inverzní izomorfismy svazů.*

Důkaz. Z definic (9.2) a (9.3) je zřejmé, že obě zobrazení zachovávají uspořádání inkluzí.

Buď $\Theta \in \operatorname{Con} \boldsymbol{A}$. Nechť $a, b \in \boldsymbol{A}$. Podle definice (9.3) a Důsledku 9.3 platí, že

$$a \equiv_{\Theta J(\Theta)} b \iff J(a) \setminus J(\Theta) = J(b) \setminus J(\Theta) \iff a \equiv_\Theta b.$$

Odtud plyne, že $\Theta J = \mathbf{1}_{\operatorname{Con} \boldsymbol{A}}$.

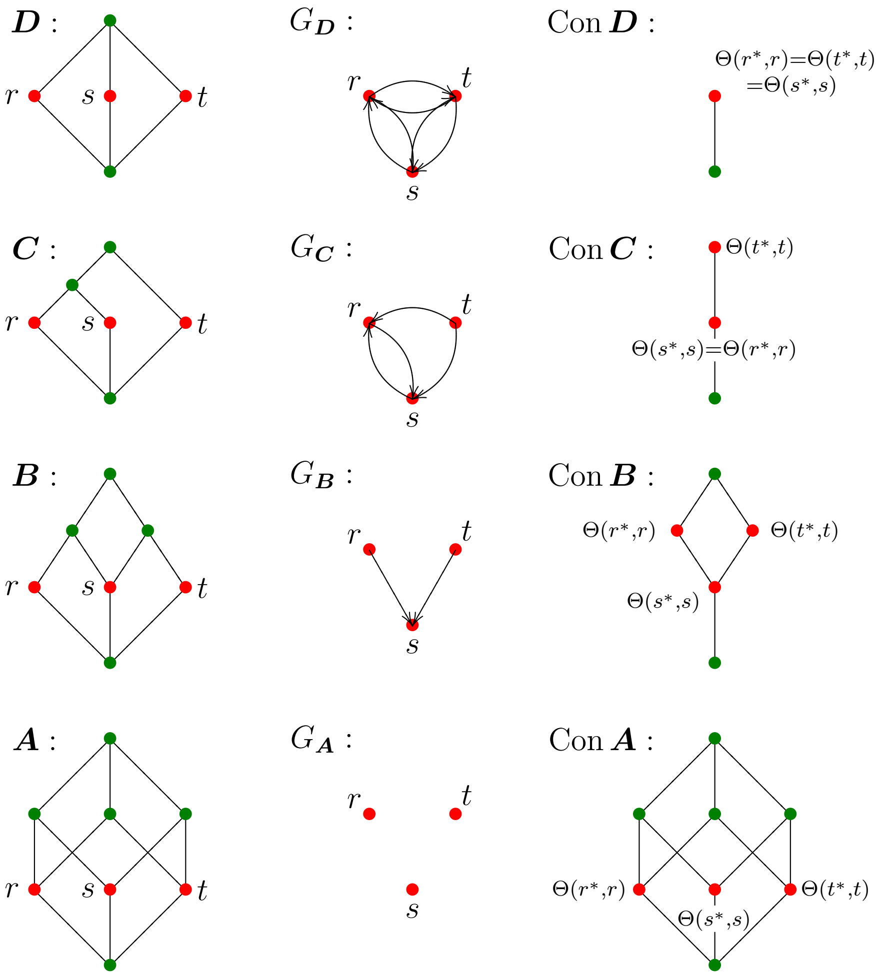
Buď $J \in \operatorname{Id} G_{\boldsymbol{A}}$ a $s \in J(\boldsymbol{A})$. Všimněme si, že $s \in J$ právě když $J(s) \setminus J = J(s^*) \setminus J$. Aplikujeme-li postupně (9.2), Důsledek 9.3 a toto pozorování, dostaneme

$$s \in J(\Theta(J)) \iff s \equiv_{\Theta(J)} s^* \iff J(s) \setminus J = J(s^*) \setminus J \iff s \in J,$$

odkud plyne $J\Theta = \mathbf{1}_{\operatorname{Id} G_{\boldsymbol{A}}}$.

Protože jsou svazové operace na $\operatorname{Con} \boldsymbol{A}$ stejně jako na $\operatorname{Id} G_{\boldsymbol{A}}$ určeny uspořádáním inkluzí, jsou zobrazení J a Θ vzájemně inverzními izomorfismy svazů. □

Na Obrázku 1 jsou znázorněny konečné svazy se třemi spojově nerozložitelnými prvky tvořícími antiřetězec, jejich grafy a svazy kongruencí.



Obrázek 1. Grafy a svazy kongruencí