

TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
7. PŘEDNÁŠKA

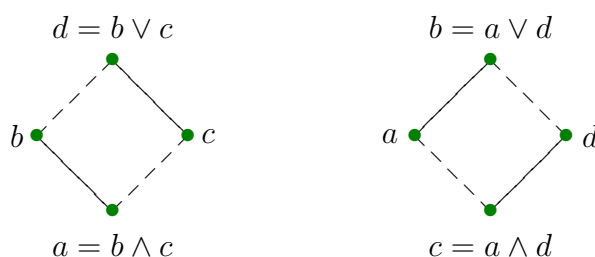
Slabá perspektivita a projektivita

Pro každou dvojici a, b prvků svazu \mathbf{A} označme symbolem $\Theta(a, b)$ nejmenší kongruenci svazu \mathbf{A} obsahující dvojici $\langle a, b \rangle$. Budeme zkoumat kdy pro danou čtveřici prvků $a, b, c, d \in \mathbf{A}$ platí, že $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(c, d)$. Protože $\Theta(a, b) = \Theta(a \wedge b, a \vee b)$, můžeme se omezit na uspořádané dvojice $a \leq b$ z \mathbf{A} . Interval b/a ve svazu \mathbf{A} je *netriviální*, pokud $a < b$.

Nechť $a \leq b$ a $c \leq d$ jsou dvojice uspořádaných prvků svazu \mathbf{A} . Řekneme, že interval d/c je *perspektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \sim b/a$ jestliže nastane jeden z těchto dvou případů:

$$\begin{cases} b = a \vee d \text{ a zároveň } c = a \wedge d, \\ a = b \wedge c \text{ a zároveň } d = b \vee c. \end{cases}$$

Oba případy, definující perspektivitu intervalů jsou znázorněny na Obrázku 1:



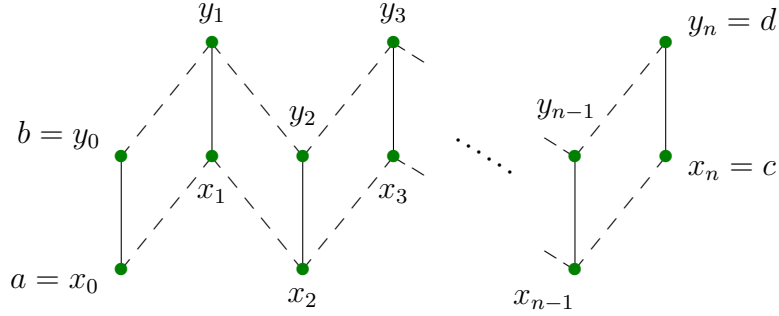
OBRÁZEK 1. $d/c \sim b/a$

Řekneme, že interval d/c je *projektivní* intervalu b/a (což označíme $d/c \approx b/a$), jestliže existuje konečná posloupnost

$$d/c = y_0/x_0 \sim y_1/x_1 \sim \dots \sim y_n/x_n = b/a.$$

Projektivita intervalů je znázorněna na Obrázku 2.

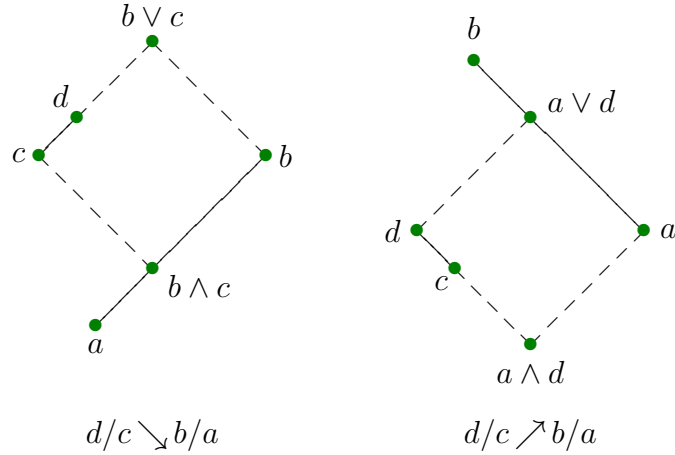
Je zřejmé, že $d/c \approx b/a \implies \Theta(a, b) = \Theta(c, d)$. Obrácená implikace obecně neplatí. Ve svazu \mathbf{M}_3 je $a/0 \not\approx 1/0$ a zároveň je svaz \mathbf{M}_3 jednoduchý a tedy platí rovnost $\Theta(0, 1) = \Theta(0, a)$.

OBRÁZEK 2. $d/c \approx b/a$

Zkoumejme, kdy $\Theta(a, b) \subseteq \Theta(c, d)$. K tomu definujme slabší relace (než perspektivita a projektivita) na množině intervalů. Buď $b/a, d/c$ dvojice jeho intervalů svazu \mathbf{A} . Budeme psát

$$\begin{aligned} d/c \searrow b/a, & \text{ jestliže } a \leq b \wedge c \text{ a zároveň } d \leq b \vee c, \\ d/c \nearrow b/a, & \text{ jestliže } b \geq a \vee d \text{ a zároveň } c \geq a \wedge d. \end{aligned}$$

Řekneme, že interval d/c je *slabě perspektivní* intervalu b/a jestliže platí $d/c \searrow b/a$ nebo $d/c \nearrow b/a$. Situaci, kdy je d/c je slabě perspektivní b/a zachycuje Obrázek 3.



OBRÁZEK 3. Slabá perspektivita

Řekneme, že d/c je *slabě projektivní* b/a (což značíme $d/c \rightrightarrows b/a$), jestliže existuje posloupnost intervalů

$$d/c = y_0/x_0 \searrow y_1/x_1 \nearrow y_2/x_2 \searrow \dots \nearrow y_n/x_n = b/a.$$

Všimněme si, že na rozdíl od projektivity není relace slabé projektivity symetrická, je pouze reflexivní a tranzitivní¹.

Lemma 7.1. *Pro intervaly b/a a d/c svazu \mathbf{A} platí, že $d/c \Rightarrow b/a$ právě když existuje posloupnost intervalů*

$$d/c = y_0/x_0 \sim v_1/u_1 \subseteq y_1/x_1 \sim \cdots \sim v_n/u_n \subseteq y_n/x_n = b/a.$$

Důkaz. (\Leftarrow) Z definic ihned nahlédneme, že z $y/x \sim v/u$ vyplývá buďto $y/x \searrow v/u$ nebo $y/x \nearrow v/u$. Inkluze $v/u \subseteq y/x$ implikuje, že platí současně $v/u \searrow y/x$ a $v/u \nearrow y/x$. (\Rightarrow) Jestliže $d/c \searrow b/a$, pak podle definice platí, že

$$d/c \subseteq (b \vee c)/c \sim b/(b \wedge c) \subseteq b/a.$$

Podobně z $d/c \nearrow b/a$ plyne, že

$$d/c \subseteq d/(a \wedge d) \sim (a \vee d)/a \subseteq b/a.$$

□

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme indukci svazový term $p_n(x, y_1, \dots, y_n)$ takto:

$$p_1(x, y_1) := x \wedge y_1,$$

$$p_{n+1}(x, y_1, \dots, y_{n+1}) := \begin{cases} p_n(x, y_1, \dots, y_n) \vee y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ p_n(x, y_1, \dots, y_n) \wedge y_{n+1}, & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Neformálně je tedy

$$p_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \cdots \vee y_n), & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (((x \wedge y_1) \vee y_2) \wedge \cdots \wedge y_n), & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Snadno nahlédneme, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$p_n(p_m(x, y_1, \dots, y_m), y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) = \begin{cases} p_{m+n}(x, y_1, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ sudé,} \\ p_{m+n-1}(x, \dots, y_m \wedge y_{m+1}, \dots, y_{m+n}), & \text{pokud je } m \text{ liché.} \end{cases}$$

Lemma 7.2. *Pro dvojici intervalů b/a a d/c svazu \mathbf{A} platí, že $d/c \Rightarrow b/a$ právě když existuje posloupnost t_1, \dots, t_n prvků svazu \mathbf{A} taková, že $p_n(a, t_1, \dots, t_n) = c$ a $p_n(b, t_1, \dots, t_n) = d$.*

Důkaz. (\Rightarrow) Je-li $d/c \searrow b/a$, potom $p_3(a, b, c, d) = c$ a $p_3(b, b, c, d) = d$. Pokud $d/c \nearrow b/a$, tak $p_2(a, d, c) = c$ a $p_2(b, d, c) = d$. Využijeme-li předchozího pozorování, sestrojíme odtud požadovanou posloupnost

¹Všimněme si, že (slabá) projektivita je právě tranzitivním obalem (slabé) perspektivity

t_1, \dots, t_n . (\Leftarrow) Všimněme si, že pro každý interval y/x svazu \mathbf{A} a každé $t \in \mathbf{A}$ platí, že

$$(y \vee t)/(x \vee t) \searrow y/x \quad \text{a} \quad (y \wedge t)/(x \wedge t) \nearrow y/x.$$

Odtud indukcí odvodíme, že pro každé přirozené číslo n a každou n -tici prvků t_1, \dots, t_n platí, že

$$p_n(b, t_1, \dots, t_n)/p_n(a, t_1, \dots, t_n) \Rightarrow b/a.$$

□

Protože p_n jsou svazové termy, platí pro každou posloupnost t_1, \dots, t_n prvků svazu \mathbf{A} a každé $a, b \in \mathbf{A}$, že

$$p_n(a, t_1, \dots, t_n) \equiv_{\Theta(a,b)} p_n(b, t_1, \dots, t_n).$$

Proto z Lemmatu 7.2 plyne, že

Důsledek 7.3. *Pro každou dvojici intervalů b/a a d/c svazu \mathbf{A} plyne z $d/c \Rightarrow b/a$, že $c \equiv_{\Theta(a,b)} d$.*

Lemma 7.4. *Bud' b/a interval svazu \mathbf{A} . Na svazu \mathbf{A} definujme relaci Φ takto: $x \equiv_{\Phi} y$ právě když existuje konečná posloupnost*

$$x \wedge y = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = x \vee y$$

v \mathbf{A} taková, že $t_j/t_{j-1} \Rightarrow b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom je relace Φ kongruencí svazu \mathbf{A} a platí rovnost $\Phi = \Theta(a, b)$.

Důkaz. Nejprve ukažme, že je relace Φ kongruencí svazu \mathbf{A} . K tomu stačí ověřit, že relace Φ splňuje podmínky Lemmatu 6.4. Protože pro každé $t \in \mathbf{A}$ platí, že $t/t \nearrow (b \vee t)/(a \vee t) \searrow b/a$, je tato relace reflexivní. Podmínky (1) a (2) Lemmatu 6.4 jsou zřejmě splněny. Předpokládejme, že pro nějakou dvojici $c \leq d$ prvků svazu \mathbf{A} platí, že $c \equiv_{\Phi} d$ a necht' $s \in \mathbf{A}$. Podle definice existuje konečná posloupnost $c = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = d$ taková, že $t_j/t_{j-1} \Rightarrow b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odtud dostaneme že, $c \vee s = t_0 \vee s \leq t_1 \vee s \leq \dots \leq t_n \vee s = d \vee s$. Ze vztahů $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \searrow t_{j-1}/t_j \Rightarrow b/a$, dostaneme, že $(t_j \vee s)/(t_{j-1} \vee s) \Rightarrow b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Podle definice relace Φ je pak $c \vee s \equiv_{\Phi} d \vee s$. Podobně bychom ukázali, že $c \wedge s \equiv_{\Phi} d \wedge s$. Podle Lemmatu 6.4 je relace Φ kongruencí svazu \mathbf{A} .

Z definice Φ je vidět, že $a \equiv_{\Phi} b$ a tedy $\Theta(a, b) \subseteq \Phi$. Podle Důsledku 7.3 je naopak $\Phi \subseteq \Theta(a, b)$. Proto se obě kongruence rovnají. □

Jemným přeformulováním Lemmatu 7.4 dostaneme následující větu.

Věta 7.5 (Dilworth 1950). *Bud' b/a a d/c dvojice intervalů svazu \mathbf{A} . Potom platí, že $\Theta(c, d) \subseteq \Theta(a, b)$ právě když existuje konečná posloupnost $c = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = d$ ve svazu \mathbf{A} taková, že $t_j/t_{j-1} \Rightarrow b/a$ pro všechna $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*