TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
4. PŘEDNÁŠKA
Distributivní svazy 2

4.1. **Svazové termy.** Buď $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ (spočetná) množina proměnných. *Svazový term* definujeme induktivně takto:

(1) Každá z proměnných $x_1, x_2, \dots$ je svazovým termem.
(2) Jsou-li p a q svazové termy, potom jsou také $(p \vee q)$ a $(p \wedge q)$ svazové termy.

V zápisu svazových termu budeme vynechávat závorky tam, kde nám to asociativita svazových operací dovolí. Například tedy budeme místo $((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$ psát jen $p_1 \vee p_2 \vee p_3$.

Symbolem $T[X]$ označíme množinu všech svazových termů s proměnnými z množiny X. *Složitost termu* je hodnota zobrazení $\rho\colon T[X] \to \mathbb{N}$ definovaná induktivně takto:

(1) $\rho(x) = 1$ pro všechna $x \in X$,
(2) $\rho(p \vee q) = \rho(p \wedge q) = \rho(p) + \rho(q) + 1$, pro všechna $p, q \in T[X]$.

Jsou-li všechny proměnné vyskytující se ve svazovém termu p prvky množiny $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, řekneme, že p je *n-ární svazový term*, což zapíšeme, podobně jako v případě číselných polynomů, symbolem $p(x_1, \dots, x_n)$. Množinu všech n-árních svazových termů označíme $T[x_1, \dots, x_n]$.

Interpretací (řádu n) termu $p \in T[x_1, \dots, x_n]$ ve svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme n-ární operaci $p_{\boldsymbol{A}}\colon A^n \to A$ na množině A určenou předpisem

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto p(a_1, \dots, a_n).$$

Svazovou (n-ární) *identitou* rozumíme výraz $p \approx q$, kde p, q jsou n-ární svazové termy. Řekneme, že třída svazů $\mathcal{U}$ splňuje svazovou identitu $p \approx q$ (což zapisujeme $p \approx_{\mathcal{U}} q$) jsou-li interpretace termů p, q ve svazu $\boldsymbol{A}$ shodné pro všechna $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$. Symbolem $p \lesssim q$ (a podobně $p \lesssim_{\mathcal{U}} q$) značíme, že $q \approx p \vee q$ (a podobně $q \approx_{\mathcal{U}} p \vee q$).

Tvrzení 4.1. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a $p \in T[x_1, \dots, x_n]$. Interpretace $p_{\boldsymbol{A}}$ termu p ve svazu $\boldsymbol{A}$ je monotóní a idempotentní operace. Dále platí, že*

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \lesssim p(x_1, \dots, x_n) \lesssim x_1 \vee \dots \vee x_n,$$

pro všechna $p \in T[x_1, \dots, x_n]$.

Důkaz. V obou případech indukcí podle složitosti termu. □

4.2. **Disjunktivně-konjunktivní tvar termů.** Svazový term p je v *disjunctivně-konjunktivním* (resp. *konjunktivně-disjunktivním*) tvaru existuje-li přirozené číslo n a konečné podmnožiny $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ takové, že

$$p = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge Y_i \right) \text{ (resp. } p = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee Y_i \right) \text{)}.$$

Připomeňme, že symbolem $\mathcal{D}$ značíme varietu všech distributivních svazů.

Věta 4.2. *Pro každý svazový term p existují svazové termy s (resp. t) v disjunktivně-konjunktivním (resp. konjunktivně-disjunktivním) tvaru takový, že*

$$p \approx_{\mathcal{D}} s \approx_{\mathcal{D}} t.$$

Důkaz. Buď p n-ární svazový term. Ukážeme, že existuje n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p \approx_{\mathcal{D}} s$. Existenci n-árního svazovho termu t v konjunktivně-disjunktivním tvaru takového, že $p \approx_{\mathcal{D}} t$ bychom ukázali obdobně.

Podle Věty 3.6 lze každý distributivní svaz vnořit do kartézské mocniny dvouprvkového svazu $\boldsymbol{C_2}$. To znamená, že varieta distributivních svazů je svazem $\boldsymbol{C_2}$ generovaná a tedy stačí sestrojit n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $p_{\boldsymbol{C_2}} = s_{\boldsymbol{C_2}}$. Pro každou n-tici $\boldsymbol{a} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \boldsymbol{C_2}^n$ položme

$$S(p) := \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1\},$$
$$\chi_{\boldsymbol{a}} := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid a_i = 1\},$$

a definujme

$$s(x_1, \dots, x_n) := \bigvee_{\boldsymbol{a} \in S(p)} \left(\bigwedge_{i \in \chi_{\boldsymbol{a}}} x_i \right). \tag{4.1}$$

Z definice (4.1) je ihned vidět, že

$$p_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1 \implies \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in S(p) \implies s_{\boldsymbol{C_2}}(a_1, \dots, a_n) = 1,$$

a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}} \leq s_{\boldsymbol{C_2}}$.

Nechť naopak pro nějaké $\boldsymbol{b} := \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in C_2^n$ platí, že $s_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Z definice (4.1) je potom vidět, že existuje $\boldsymbol{a} \in S(p)$ takové, že $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$. Podle Tvrzení 4.1 indukují svazové termy monotónní operace a tedy $p_{\boldsymbol{C_2}}(\boldsymbol{b}) = 1$. Dostáváme tak i opačnou nerovnost $s_{\boldsymbol{C_2}} \leq p_{\boldsymbol{C_2}}$. □

Důsledek 4.3. *Konečně generovaný distributivní svaz je konečný.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{D}$ distributivní svaz, který je generován konečnou množinou $\{d_1, \dots, d_n\}$. Vzhledem k Větě 4.2 existuje pro každé $c \in \boldsymbol{D}$ n-ární svazový term s v disjunktivně-konjunktivním tvaru takový, že $c = s(d_1, \cdots, d_n)$. Z definice (4.1) je vidět, že existuje nejvýše 2^{2^n} takových termů. Svaz $\boldsymbol{D}$ má tedy nejvýše 2^{2^n} prvků. $\square$

4.3. **Distributivní polosvazy a ideály.** *Polosvaz* $\boldsymbol{B}$ sestává z množiny B a jedné binární operace, značme ji třeba $*$, která je

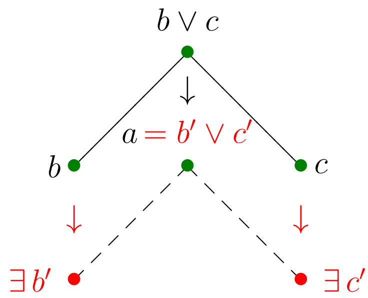
- **asociativní:** tj., $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- **komutativní:** tj., $a * b = b * a$,
- **idempotentní:** tj., $a * a = a$,

pro všechna $a, b, c \in B$.

Vzhledem k Lemmatu 1.3 jsou obě svazové operace idempotentní. Proto tvoří oba redukty $(A, \vee)$ a $(A, \wedge)$ svazu $\boldsymbol{A} = (A, \vee, \wedge)$ polosvazy. Polosvaz $(A, \vee)$ budeme nazývat *spojovým polosvazem* (nebo také *$\vee$-polosvazem*) a polosvaz $(A, \wedge)$ *průsekovým polosvazem* (nebo také *$\wedge$-polosvazem*).

Je-li dán spojový polosvaz $\boldsymbol{A}$, definujeme předpisem $a \leq b$ pokud $a \vee b = b$, $a, b \in \boldsymbol{A}$, binární relaci na $\boldsymbol{A}$. Snadno nahlédneme, že tato relace je uspořádáním a $a \vee b$ odpovídá supremu množiny $\{a, b\}$. Podobně v případě průsekového polosvazu $\boldsymbol{B}$ definujeme uspořádání předpisem $a \leq b$ pokud $a = a \wedge b$, $a, b \in \boldsymbol{B}$, a $a \wedge b$ je infimem množiny $\{a, b\}$ vzhledem k tomuto uspořádání.

Definice. Spojový polosvaz $\boldsymbol{A}$ je *distributivní* pokud pro každé $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq b \vee c$, existují $b', c' \in \boldsymbol{A}$ tak, že $b' \leq b$, $c' \leq c$ a $a = b' \vee c'$.



Obrázek 1. Distributivní polosvaz

Buď $\boldsymbol{A}$ spojový polosvaz. Stejně jako v případě svazů, *ideálem* polosvazu $\boldsymbol{A}$ budeme rozumět podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že $a, b \in I$ právě když $a \vee b \in I$, pro všechna $a, b \in I$. Podobně jako v případě svazů snadno nahlédneme, že ideály odpovídají dolním podmnožinám polosvazů uzavřeným na konečná spojení. Množinu všech ideálů spojového polosvazu $\boldsymbol{A}$ označíme $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$.

Množina $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$ je uspořádaná inkluzí. Toto uspořádání na ní indukuje strukturu svazu; operace průseku odpovídá průniku a spojení je dáno předpisem

$$I \vee J := \{a \in \boldsymbol{A} \mid \exists\, i \in I,\ \exists\, j \in J \colon a \leq i \vee j\}, \quad \text{pro } I, J \in \mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A}).$$

Lemma 4.4. *Spojový polosvaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní právě když je svaz $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$ jeho ideálů distributivní.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme nejprve, že spojový polosvaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Ukážeme, že $I \cap (J \vee K) \leq (I \cap J) \vee (I \cap K)$ pro každou trojici I, J, K jeho ideálů. Odtud dostaneme distributivitu svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$. Nechť $a \in I \cap (J \vee K)$. Potom $a \in I$ a existují $b \in J$ a $c \in K$ tak, že $a \leq b \vee c$. Z distributivity spojového polosvazu $\boldsymbol{A}$ plyne, že existují $b' \leq b$ a $c' \leq c$ takové, že $a = b' \vee c'$. Odtud $b' \leq a, b$ a tedy $b' \in I \cap J$. Podobně $c' \leq a, c$ a tedy $c' \in I \cap K$. Proto je $a = b' \vee c' \in (I \cap J) \vee (I \cap K)$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme naopak, že je svaz $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$ distributivní. Nechť $a \leq b \vee c$ ve spojovém polosvazu $\boldsymbol{A}$. Potom platí, že $\downarrow a \leq \downarrow b \vee \downarrow c$. Odtud a z distributivity svazu $\mathrm{Id}\,(\boldsymbol{A})$ dostaneme, že

$$\downarrow a = \downarrow a \cap (\downarrow b \vee \downarrow c) = (\downarrow a \cap \downarrow b) \vee (\downarrow a \cap \downarrow c).$$

Proto existují $b' \leq a, b$ a $c' \leq a, c$ tak, že $a \leq b' \vee c'$. Protože $b', c' \leq a$, je nutně $a = b' \vee c'$. Ukázali jsme distributivitu spojového polosvazu $\boldsymbol{A}$. $\square$