TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
3. PŘEDNÁŠKA
DISTRIBUTIVNÍ SVAZY

3.1. **Distributivní svazy.**

Lemma 3.1. *Svaz* $\boldsymbol{A}$ *je distributivní právě když platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \tag{3.1}$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je distributivní. Potom platí, že

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)\\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že rovnost (3.1) platí pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Nejprve ukážeme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ a předpokládejme, že $a \leq c$. Potom $a = a \wedge c$, $c = a \vee c$ a revnost (3.1) je tvaru

$$(a \wedge b) \vee a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \wedge (b \vee c). \tag{3.2}$$

Protože $a \leq c$, je navíc $a \wedge b \leq b \wedge c$ a podobně $a \vee b \leq b \vee c$. Z rovnosti (3.2) proto dostaneme, že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$. Ukázali jsme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární.

Nechť jsou nyní $a, b, c, \in \boldsymbol{A}$ libovolné. Položme

$$\begin{aligned}u &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c),\\ v &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

Protože $a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, dostaneme z modularity svazu $\boldsymbol{A}$, že

(3.3)

$$\begin{aligned}a \vee (b \wedge c) \vee v &= \big(a \vee (b \wedge c)\big) \vee \big((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)\big)\\ &= \big(a \vee (b \wedge c) \vee (b \vee c)\big) \wedge \big((a \vee b) \wedge (a \vee c)\big)\\ &= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).\end{aligned}$$

Snadno nahldneme, že $u \leq a \vee (b \wedge c)$. Proto platí, že

$$a \vee (b \wedge c) \vee u = a \vee (b \wedge c). \tag{3.4}$$

Pokud $u = v$, dostaneme z rovností (3.3) a (3.4), že $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Proto je svaz $\boldsymbol{A}$ distributivní. $\square$

Z Lemmatu 2.4 plyne, že modulární svaz, ve kterém existují prvky a, b, c takové, že $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ obsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$. Protože svaz $\boldsymbol{M_3}$ není distributivní, dostáváme z Lemmatu 3.1, že

Věta 3.2. *Modulární svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.*

Společně s Větou 2.2 dostaneme, že

Důsledek 3.3. *Svaz je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ nebo svazu $\boldsymbol{M_3}$.*

Definice. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. *Ideálem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $I \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \vee b \in I \text{ právě když } a, b \in I.$$

Duálně *filtrem* svazu $\boldsymbol{A}$ rozumíme podmnožinu $F \subseteq \boldsymbol{A}$ takovou, že

$$a \wedge b \in F \text{ právě když } a, b \in F.$$

Ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je *prvoideál*, pokud je $\boldsymbol{A} \setminus I$ filtr. Duálně, filtr F svazu $\boldsymbol{A}$ je *ultrafiltr*, pokud tvoří množina $\boldsymbol{A} \setminus F$ ideál (a tedy nutně prvoideál).

Podmnožinu D (resp. H) částečně uspořádané množiny $(P, \leq)$ nazveme *dolní* (resp. *horní*) podmnožinou P pokud pro každé $d \in D$ (resp. $h \in H$) a každé $p \in P$ plyne z $p \leq d$ (resp. $h \leq p$), že $p \in D$ (resp. $p \in H$). Podmnožina částečně uspořádané množiny je tedy dolní (resp. horní) pokud s každým svým prvkem obsahuje i všechny prvky menší (resp. větší). Všimněme si, že D je dolní podmnožina, právě když je $P \setminus D$ horní podmnožina uspořádané podmnožiny P.

Z definice je vidět, že ideály jsou právě neprázdné dolní podmnožiny svazu uzavřené na konečná spojení a filtry jsou právě neprázdné horní podmnožiny svazu uzavřené na konečné průseky. Všimněme si také, že ideál I svazu $\boldsymbol{A}$ je prvoideál právě když je jeho doplněk $\boldsymbol{A} \setminus I$ neprázdný a uzavřený na průseky.

Lemma 3.4. *Pro každou dvojici různých prvků distributivního svazu existuje prvoideál obsahující právě jeden z nich.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{A}$ distributivní svaz a $a \neq b$ dvojice jeho prvků. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \nleq b$. Uvažme možinu

$$\mathcal{B} := \{I \mid I \text{ je ideál, } a \notin I \text{ a } b \in I\}.$$

Snadno nahládneme, že $\{x \in \boldsymbol{A} \mid x \leq b\} \in \mathcal{B}$ a množina $\mathcal{B}$ je tedy neprázdná. Možina $\mathcal{B}$ je zřejmě uzavřená na sjednocení řetězců a podle Zornova lemmatu má tedy maximální prvek. Označme jej $P_{\langle a,b \rangle}$.

Protože $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$, je $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Ukážeme, že $P_{\langle a,b\rangle}$ je prvoideál. Pro spor předpokládejme, že existují $c, d \notin P_{\langle a,b\rangle}$ takové, že $c \wedge d \in P_{\langle a,b\rangle}$. Množina

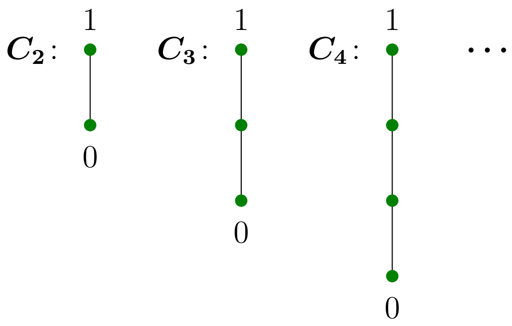
$$I_c := \{x \in \boldsymbol{A} \mid \exists y \in P_{\langle a,b\rangle} \colon x \leq c \vee y\}$$

tvoří ideál ostře obsahující $P_{\langle a,b\rangle}$ (neboť $c \notin P_{\langle a,b\rangle}$). Z maximality $P_{\langle a,b\rangle}$ plyne, že $a \in I_c$. Proto existuje $y_c \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq c \vee y_c$. Podobně ukážeme, že existuje $y_d \in P_{\langle a,b\rangle}$ tak, že $a \leq d \vee y_d$. Položme $y = y_c \vee y_d$. Protože je $P_{\langle a,b\rangle}$ ideál, platí, že $y \in P_{\langle a,b\rangle}$. Z distributivity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme, že

$$a \leq (c \vee y) \wedge (d \vee y) = (c \wedge d) \vee y \in P_{\langle a,b\rangle}.$$

To je spor neboť z $P_{\langle a,b\rangle} \in \mathcal{B}$ plyne, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$. □

Symbolem $\boldsymbol{C_n}$ označme n-prvkový totálně uspořádaný svaz.



Obrázek 1. Totálňe uspořádané svazy

Lemma 3.5. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Je-li P prvoideál svazu $\boldsymbol{A}$, je dán předpisem*

$$\varphi_P(a) := \begin{cases} 0 & \text{jestliže } a \in P \\ 1 & \text{jestliže } a \notin P \end{cases} \tag{3.5}$$

svazový homomorfismus $\varphi_P \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Naopak $\varphi^{-1}(0)$ je prvoideál pro každý homomorfismus $\varphi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$.

Důkaz. Z toho, že P je ideál, snadno nahlédneme, že zobrazení φ_P zachovává spojení. Protože je P prvoideál, je $\boldsymbol{A} \setminus P$ filtr. Odtud plyne, že φ_P zachovává průseky. Proto je zobrazení φ_P určené přepisem (**??**) svazový homomorfismus.

Je-li $\varphi \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}$ svazový homomorfismus, je $\varphi^{-1}(0)$ ideál a $\varphi^{-1}(1) = \boldsymbol{A} \setminus \varphi^{-1}(0)$ filtr. Proto je množina $\varphi^{-1}(0)$ prvoideálem. □

Věta 3.6. *Každý distributivní svaz lze vnořit do kartézské mocniny svazu $\boldsymbol{C_2}$.*

Důkaz. Položme
$$A_{\nleq} := \{\langle a,b\rangle \mid a \nleq b \text{ v } \boldsymbol{A}\}.$$
Podle Lemmatu 3.4 existuje pro každou dvojici $\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}$ prvoideál $P_{\langle a,b\rangle}$ takový, že $a \notin P_{\langle a,b\rangle}$ a $b \in P_{\langle a,b\rangle}$. Vzhledem k Lemmatu **??** je zobrazení
$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C_2}^{A_{\nleq}}$$
svazovým homomorfismem. Je-li $a \neq b$ v $\boldsymbol{A}$, je $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) = 1$ a $\varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b) = 0$. Proto
$$\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(a) \neq \prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}(b).$$
Odtud je vidět, že je součin $\prod_{\langle a,b\rangle \in A_{\nleq}} \varphi_{P_{\langle a,b\rangle}}$ vnoření. $\square$

Z Věty **??** plyne, že varieta $\mathcal{D}$ distributivních svazů je generovaná dvouprvkovým svazem. Protože každá netriviální varieta svazů[1] je obsahuje nutně dvouprvkový svaz, tvoří distributivní svazy nejmenší netriviální svazovou varietu. To také znamená, že každá svazová identita, která platí ve dvouprvkovém svazu platí ve všech distributivních svazech.

[1]Různá od variety $\{\bullet\}$ obsahující jen jednoprvkový svaz.