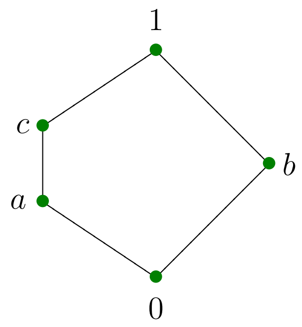
TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
2. PŘEDNÁŠKA
Svazy $\boldsymbol{N_5}$ a $\boldsymbol{M_3}$

2.1. **Modulární svazy - pokračování.** Připomeňme nemodulární pěti-prvkový svaz $\boldsymbol{N_5}$ znázorněný na Obrázku 1.



OBRÁZEK 1. Svaz $\boldsymbol{N_5}$

Lemma 2.1. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz obsahující prvky a, b, c takové, že*

$$c \wedge b \leq a < c \leq a \vee b. \tag{2.1}$$

Potom prvky $c \wedge b, a, b, c, a \vee b$ tvoří podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.

Důkaz. Jestliže $a \leq b$, pak $b = a \vee b$ a tedy $c = c \wedge (a \vee b) = c \wedge b \leq a$. Pokud $b \leq a$, dostaneme $c \leq a \vee b = a$. V obou případech dostáváme nerovnost $c \leq a$, která je ve sporu s (2.1). Proto jsou prvky a a b neporovnatelné. Odtud plyne, že $a \wedge b < a$. Z (2.1) snadno nahlédneme, že $c \wedge b = a \wedge b$. Podobně ukážeme, že prvky b a c jsou neporovnatelné, a že $c < a \vee b = c \vee b$. Proto je množina $B := \{c \wedge b, a, b, c, a \vee b\}$ pěti-prvková a zbývá ověřit, že je uzavřena na suprema a infima. Jediné dvouprvkové podmnožiny množiny B jejichž prvky jsou neporovnatelné jsou $\{a, b\}$ a $\{b, c\}$. Vzhledem k (2.1) je $a \wedge b = c \wedge b \in B$ a $c \vee b = a \vee b \in B$. $\square$

Věta 2.2. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Z definice plyne, že třída modulárních svazů je uzavřena na podsvazy (ukázali jsme dokonce, že modulární svazy tvoří varietu). Podsvaz modulárního svazu proto nemůže být izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$, který modulární není.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ není modulární. Potom existují $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq c$ a $a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c$. Položme $a' := a \vee (b \wedge c)$ a $c' := (a \vee b) \wedge c$. Potom je $b \wedge c' = b \wedge (a \vee b) \wedge c = b \wedge c \leq a \vee (b \wedge c) = a'$ a podobně $c' = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b = a \vee b \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c) \vee b = a' \vee b$. Podle Lemmatu 2.1 tvoří množina $\{c' \wedge b, a', b, c', a' \vee b\}$ podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. □

2.2. **Distributivní svazy.**

Lemma 2.3. *Pro svaz $\boldsymbol{A}$ jsou následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$,
2. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *pro všechna* $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. ((1) $\rightarrow$ (2)): Vhodnou aplikací absorpce a podmínky (1) dostaneme:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \\ &= a \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c).\end{aligned}$$

Implikaci ((2) $\rightarrow$ (1)) ukážeme obdobně. □

Definice. Řekneme, že svaz je *distributivní* jestliže splňuje vzájemně ekvivalentní podmínky (1) a (2).

Protože distributivní svazy jsou charakterizovány splňováním identit, tvoří varietu. Budeme ji značit $\mathcal{D}$. Všimněme si, že je-li $a \leq c$, potom $a \vee c = c$. Proto v tomto případě dostaneme z distributivity, že

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Proto je každý distributivní svaz modulární.

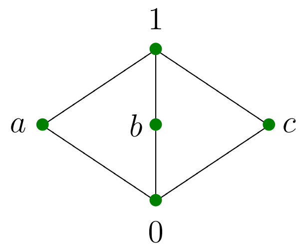
Uvažme svaz $\boldsymbol{M_3}$ znázorněný na následujícím Obrázku 2:

Svaz $\boldsymbol{M_3}$ zřejmě neobsahuje podsvaz izomorfní svazu $\boldsymbol{N_5}$ a je modulární. Protože ale v $\boldsymbol{M_3}$ platí, že

$$a \vee (b \wedge c) = a < 1 = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

není tento svaz distributivní.

Cvičení 2.1. *Ukažte, že $\boldsymbol{M_3}$ je izomorfní svazu všech podgrup Abelovy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*



Obrázek 2. Svaz $\boldsymbol{M_3}$

Lemma 2.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ modulární svaz, $a, b, c \in \boldsymbol{A}$. Položme*

$$\begin{aligned} v &:= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c), \\ u &:= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \\ a_1 &:= (a \vee u) \wedge v, \\ b_1 &:= (b \vee u) \wedge v, \\ c_1 &:= (c \vee u) \wedge v. \end{aligned}$$

Pokud $u \neq v$, potom tvoří prvky u, v, a_1, b_1, c_1 podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní svazu $\boldsymbol{M_3}$.

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned} a_1 &= (a \vee u) \wedge v = (a \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \wedge v = (a \vee (b \wedge c)) \wedge v \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c). \end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že

$$b_1 = (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c), \text{ a že } c_1 = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b).$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b_1 &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (a \wedge c)) \wedge (a \vee c) \\ &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)). \end{aligned}$$

Jistě je $b \wedge c \leq b \vee (a \wedge c)$ a proto z modularity dostaneme

$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge (b \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c).$$

Vzhledem k modularitě a nerovnosti $a \wedge c \leq a$ platí, že

$$(a \wedge (b \vee (a \wedge c))) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = u.$$

Obdobně bychom ukázali, že $u = a_1 \wedge c_1 = b_1 \wedge c_1$. Snadno nahlédneme, že $u \leq v$. Z modularity svazu $\boldsymbol{A}$ dostaneme rovnosti

$$a_1 = (a \wedge v) \vee u, \quad b_1 = (b \wedge v) \vee u \quad \text{a} \quad c_1 = (c \wedge v) \vee u.$$

Zaměníme-li operace průseku a spojení, ukážeme obdobně jako výše, že

$$v = a_1 \vee b_1 = a_1 \vee c_1 = b_1 \vee c_1.$$

Z nerovnosti $u \neq v$, a tedy nutně $u < v$, již snadno odvodíme, že prvky a_1, b_1, c_1 jsou neporovnatelné a spolu s u a v tvoří podsvaz svazu $\boldsymbol{A}$ izomorfní $\boldsymbol{M_3}$. $\square$