TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
11. PŘEDNÁŠKA
Volný svaz a problém slov

Definice. Buď X množina. Svaz $\boldsymbol{F}$ nazveme *volným* s bazí X, jestliže $X \subseteq \boldsymbol{F}$ a pro každý svaz $\boldsymbol{A}$ a každé zobrazní $f\colon X \to \boldsymbol{A}$ existuje právě jeden svazový homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{A}$ takový, že $\varphi \restriction X = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & \subseteq & \boldsymbol{F} \arrow[dl, dotted, "\exists!\varphi"] \\ & \boldsymbol{A} & \end{tikzcd}$$

Obrázek 1. Volný svaz

Připomeňme, že symbolem 1_X značíme identické zobrazení $X \to X$.

Lemma 12.1. *Jsou-li $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ volné svazy s bazí X potom existuje svazový izomorfismus $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ takový, že $\mu \restriction X = 1_X$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "1_X"] \arrow[d, bend left, "1_X"] & \subseteq & \boldsymbol{F} \arrow[loop above, "1_{\boldsymbol{F}}"] \arrow[d, bend left, "\exists!\mu"] \\ X \arrow[loop below, "1_X"] \arrow[u, bend left, "1_X"] & \subseteq & \boldsymbol{G} \arrow[loop below, "1_{\boldsymbol{G}}"] \arrow[u, bend left, "\exists!\nu"] \end{tikzcd}$$

Obrázek 2. Izomorfismus volných svazů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ s bazí X

Důkaz. Z vlastností volného svazu plyne, že existuje právě jeden svazový homomorfismus $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ takový, že $\mu \restriction X = 1_X$ a právě jeden svazový homomorfismus $\nu\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}$ takový, že $\nu \restriction X = 1_X$. Složením μ a ν dostaneme svazové homomorfismy $\nu \circ \mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ a $\mu \circ \nu\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ takové, že $\nu\circ\mu \restriction X = \mu\circ\nu \restriction X = 1_X$. Z jednoznačnosti takových homomorfismů (jež plyne z toho, že báze X generuje jak $\boldsymbol{F}$ tak $\boldsymbol{G}$) odvodíme, že $\nu \circ \mu = 1_{\boldsymbol{F}}$ a $\mu \circ \nu = 1_{\boldsymbol{G}}$. Proto je $\mu\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$ izomorfismus. □

12.1. **Problém slov.** Buď $\boldsymbol{A}$ svaz, $X \subseteq \boldsymbol{A}$ jeho podmnožina a $p \in T(X)$ term v proměnných z této podmnožiny. Symbolem $p^{\boldsymbol{A}}$ označíme prvek svazu $\boldsymbol{A}$ reprezentovaný termem p (tj. hodnotu termu p ve svazu $\boldsymbol{A}$). *Problémem slov* ve svazu $\boldsymbol{A}$ (vzhledem k množině X) budeme rozumět otázku, zda pro danou dvojici termů $p, q \in T(X)$ platí rovnost $p^{\boldsymbol{A}} = q^{\boldsymbol{A}}$. *Řešením problému slov* pak bude algoritmus, který správně rozhodne problém slov pro každou dvojici termů $p, q \in T(X)$.

Protože $p^{\boldsymbol{A}} = q^{\boldsymbol{A}}$ právě když $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ a současně $q^{\boldsymbol{A}} \leq p^{\boldsymbol{A}}$, stačí k řešení problému slov ve svazu $\boldsymbol{A}$ (vzhledem k dané podmnožině X) najít algoritmus který dokáže rozhodnout zda $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ pro každou dvojici termů $p, q \in T(X)$. Protože $p^{\boldsymbol{A}} \leq q^{\boldsymbol{A}}$ právě když $p^{\boldsymbol{A}} = (p \wedge q)^{\boldsymbol{A}}$ a proto z řešení problému slov plyne naopak existence takového algoritmu. Místo rovnosti termů tedy postačí termy ve svazu $\boldsymbol{A}$ porovnat.

Volný svaz s bazí X setrojíme jako kvocient algebraické struktury $\boldsymbol{T}(X) = (T(X), \vee, \wedge)$ všech svazových termů v proměnných z množiny X podle kongruence indukované svazovými axiomy (konkrétně komutativitou, asociativitou a absorpcí). Takto zkonstruovaný svaz budeme značit $\boldsymbol{F}(X)$. Ukážeme, že ve volném svazu $\boldsymbol{F}(X)$ existuje řešení problému slov vzhledem k jeho bázi X.

12.2. **Dayova zdvojovací konstrukce.** Připomeňme, že $\boldsymbol{C_2}$ značí dvouprvkový svaz. Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a K jeho konvexní podmnožina. Položme

$$\begin{aligned} D &:= \downarrow K \cup (\boldsymbol{A} \setminus \uparrow K) = \boldsymbol{A} \setminus (\uparrow K \setminus \downarrow K), \\ H &:= \uparrow K. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Snadno nahlédneme, že D je dolní podmnožina svazu $\boldsymbol{A}$, H je horní podmnožina, a že $K = D \cap H$ a $\boldsymbol{A} = D \cup H$. Definujme

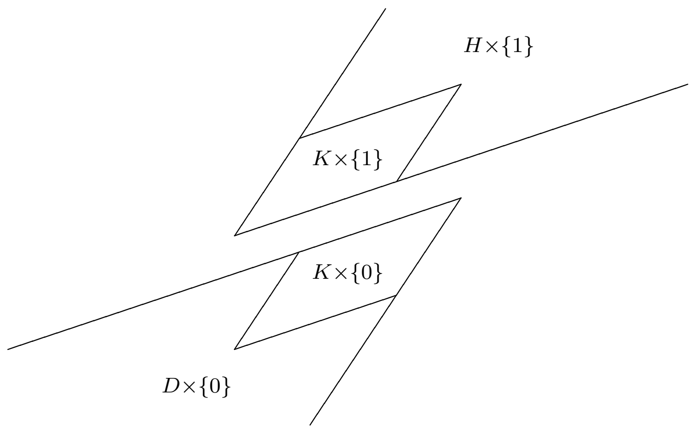
$$\boldsymbol{A}[K] := (D \times \{0\}) \cup (H \times \{1\}) \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C_2}. \tag{12.2}$$

Konstrukce $\boldsymbol{A}[K]$ je znázorněna na obrázku 3.

Lemma 12.2. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz a K jeho konvexní podmnožina. Potom je $\boldsymbol{A}[K]$ svazem*[1] *a zobrazení*

$$\begin{aligned} \pi^{\boldsymbol{A}[K]}\colon \boldsymbol{A}[K] &\to \boldsymbol{A} \\ \langle a, i\rangle &\mapsto a \end{aligned}$$

[1]ale ne nutně podsvazem $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C_2}$



OBRÁZEK 3. Svaz $\boldsymbol{A}$[K]

svazovým homomorfismem na svaz $\boldsymbol{A}$.

Důkaz. Definujeme D a H jako v (12.1). Nechť $\langle a,i\rangle,\langle b,j\rangle \in \boldsymbol{A}[K]$. Pokud $\langle a\vee b, i\vee j\rangle \notin \boldsymbol{A}[K]$, nutně $a\vee b\notin D$ a proto je $\langle a\vee b,1\rangle = \sup\{\langle a,i\rangle,\langle b,j\rangle\}$ v uspořádané množině $\boldsymbol{A}[K]$. Pokud naopak $\langle a\vee b,i\vee j\rangle \in \boldsymbol{A}[K]$, platí zřejmě rovnost $\langle a\vee b,i\vee j\rangle = \sup\{\langle a,i\rangle,\langle b,j\rangle\}$. Proto je uspořádaná množina $\boldsymbol{A}[K]$ uzavřena na suprema svých neprázných konečných podmnožin. Podobně ukážeme, že $\boldsymbol{A}[K]$ je uzavřena na infima svých neprázných konečných podmnožin. Proto je $\boldsymbol{A}[K]$ svaz.

Označme $\vee_K$, resp. $\wedge_K$ operace spojení, resp. průseku ve svazu $\boldsymbol{A}[K]$. Z úvah v předchozím odstavci plyne, že $\langle a,i\rangle \vee_K \langle b,j\rangle \in \{a\vee b\}\times\{0,1\}$. Podobně platí, že $\langle a,i\rangle \wedge_K \langle b,j\rangle \in \{a\wedge b\}\times\{0,1\}$. Odtud plyne, že je zobrazení $\pi^{\boldsymbol{A}[K]}$ svazovým homomorfismem. □

12.3. **Problém slov ve svazu $\boldsymbol{F}(X)$.** Řešení problému slov ve volném svazu získáme na základě následující věty.

Věta 12.3. *Buď X množina a $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bazí X. Potom pro všechna $x,y\in X$ a $p,q,p_1,q_1,p_2,q_2 \in T(X)$ platí, že*

(1) $x\le y \iff x=y$,
(2) $x\le (q_1\vee q_2)^{\boldsymbol{F}} \iff x\le {q_1}^{\boldsymbol{F}}$ *nebo* $x\le {q_2}^{\boldsymbol{F}}$,
(3) $(p_1\wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}\le y \iff {p_1}^{\boldsymbol{F}}\le y$ *nebo* ${p_2}^{\boldsymbol{F}}\le y$,
(4) $(p_1\vee p_2)^{\boldsymbol{F}}\le q^{\boldsymbol{F}} \iff {p_1}^{\boldsymbol{F}}\le q^{\boldsymbol{F}}$ *a zároveň* ${p_2}^{\boldsymbol{F}}\le q^{\boldsymbol{F}}$,
(5) $p^{\boldsymbol{F}}\le (q_1\wedge q_2)^{\boldsymbol{F}} \iff p^{\boldsymbol{F}}\le {q_1}^{\boldsymbol{F}}$ *a zároveň* $p^{\boldsymbol{F}}\le {q_2}^{\boldsymbol{F}}$,

(6) $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$ *právě když platí alespoň jedna z následujících čtyř nerovností*

$$\begin{aligned} {p_1}^{\boldsymbol{F}} &\leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, \qquad & (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} &\leq {q_1}^{\boldsymbol{F}}, \\ {p_2}^{\boldsymbol{F}} &\leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, \qquad & (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} &\leq {q_2}^{\boldsymbol{F}}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Důkaz. Implikace ($\Leftarrow$) podmínek (1-6) zřejmě platí, stačí tedy ověřovat implikace opačné. Předpokládejme, že $x \neq y$ a uvažme zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{C_2}$ takové, že $f(x) = 1$ a $f(y) = 0$. Protože je svaz $\boldsymbol{F}$ volný s bazí X, lze toto zobrazní rozšířit na homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C_2}$. Protože $\varphi(x) = f(x) = 1 \nleq 0 = f(y) = \varphi(y)$, je nutně $x \nleq y$. Proto platí (1). Abychom ověřili podmínku (2), ukažme nejprve, že

Tvrzení 1. *Pro každé $q \in T(X)$ platí, že*

$$x \nleq q^{\boldsymbol{F}} \implies q^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U \text{ pro nějakou konečnou } U \subseteq X \setminus \{x\}. \tag{12.4}$$

Důkaz. Označme S_x množinu všech $q \in T(X)$ splňujících implikaci (12.4). Snadno nahlédneme, že $X \subseteq S_x$ a pokud $p, q \in S_x$, tak $p \vee q \in S_x$ podobně jako $p \wedge q \in S_x$. Odtud ale plyne, že $S_x = T(X)$ a následně i dokazované tvrzení. $\perp$

Předpokládejme, že $x \nleq {q_1}^{\boldsymbol{F}}$ a zároveň $x \nleq {q_2}^{\boldsymbol{F}}$. Vzhledem k Tvrzení 1 pak existují konečné $U_1, U_2 \subseteq X \setminus \{x\}$ takové, že ${q_1}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U_1$ a ${q_2}^{\boldsymbol{F}} \leq \bigvee U_2$. Položme $f(x) = 1$ a $f(u) = 0$ pro všechna $u \in X \setminus \{x\}$. Takto definivané zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{C_2}$ lze rozšířit na homomotfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C_2}$. Z předchozího plyne, že

$$\varphi(x) = f(x) = 1 \quad \text{a} \quad \varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}) \leq \bigvee \varphi(U_1 \cup U_2) = 0.$$

Odtud dostaneme, že $x \nleq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$. Tímto jsme ověřili podmínku (2). Podmínku (3) lze ukázat analogicky. Podmínky (4) a (5) platí zřejmě v každém svazu.

Zbývá ověřit implikaci $\Rightarrow$ podmínky (6). Předpokládejme, že platí $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}$ a položme $K := (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}} / (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}$. Definujme $D := \downarrow K \cup (\boldsymbol{F} \setminus \uparrow K) = \boldsymbol{F} \setminus (\uparrow K \setminus \downarrow K)$ a $H := \uparrow K$ jako v (12.1). Z definic plyne, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \setminus D &= \{a \in \boldsymbol{F} \mid (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq a \nleq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}\}, \\ \boldsymbol{F} \setminus H &= \{a \in \boldsymbol{F} \mid (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \nleq a\}. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Zvolme zobrazení $f\colon X \to \boldsymbol{F}[K]$ takové, že $x \mapsto \langle x, i \rangle \in \{x\} \times \boldsymbol{C_2}$. Protože je $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bází X, existuje homomorfismus $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ takový, že $f = \varphi \restriction X$. Odtud plyne, že $\pi_{\boldsymbol{F}[K]} \circ \varphi \restriction X = 1_X$. Z jednoznačnosti takového homomorfismu $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ plyne, že $\pi_{\boldsymbol{F}[K]} \circ \varphi = 1_{\boldsymbol{F}}$. Odtud odvodíme, že

$$\varphi(a) = \langle a, i \rangle \in \{a\} \times \boldsymbol{C_2},$$

pro všechna $a \in \boldsymbol{F}$.

Pro spor dále předpokládejme, že neplatí žádná z nerovností (12.3). Potom pro $i = 1, 2$ platí, že

$$(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq p_i{}^{\boldsymbol{F}} \nleq (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}},$$

a tedy vzhledem k (12.5) je $p_i{}^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F} \setminus D$. Odtud plyne, že $\varphi(p_i{}^{\boldsymbol{F}}) = \langle p_i{}^{\boldsymbol{F}}, 1 \rangle$. Protože je $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ homomorfismus a $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \in K$ dostaneme, že

$$\varphi((p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}) = \bigwedge_{i=1}^{2} \varphi(p_i{}^{\boldsymbol{F}}) = \bigwedge_{i=1}^{2} \langle p_i{}^{\boldsymbol{F}}, 1 \rangle = \langle (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}, 1 \rangle. \tag{12.6}$$

Dále podle našeho předpokladu platí pro $j = 1, 2$, že

$$(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \nleq q_j{}^{\boldsymbol{F}},$$

a tedy z (12.5) dostaneme, že $q_j{}^{\boldsymbol{F}} \in \boldsymbol{F} \setminus H$. Odtud plyne, že $\varphi(q_j{}^{\boldsymbol{F}}) = \langle q_j{}^{\boldsymbol{F}}, 0 \rangle$ pro obě $j \in \{1, 2\}$. Protože je $\varphi\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}[K]$ homomorfismus a $(q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}} \in K$ dostaneme, že

$$\varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}) = \bigvee_{j=1}^{2} \varphi(q_j{}^{\boldsymbol{F}}) = \bigvee_{j=1}^{2} \langle q_j{}^{\boldsymbol{F}}, 0 \rangle = \langle (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, 0 \rangle. \tag{12.7}$$

Z rovností (12.6) a (12.7) plyne, že

$$\varphi((p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}) = \langle (p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}}, 1 \rangle \nleq \langle (q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}, 0 \rangle = \varphi((q_1 \vee q_2)^{\boldsymbol{F}}).$$

To je ve sporu s předpokladem $(p_1 \wedge p_2)^{\boldsymbol{F}} \leq (q_1 \wedge q_2)^{\boldsymbol{F}}$. □

Poznámka. *Podmínka (6) z právě dokázané Věty 12.3 je často nazývaná Whitmanova podmínka*[2] *a značena (W).*

Z Věty 12.3 je vidět, že ve volném svazu $\boldsymbol{F}(X)$ lze problém slov řešit postupnou redukcí na jednodušší termy. Odtud plyne, že

Důsledek 12.4. *Buď $\boldsymbol{F}$ svaz a X jeho podmnožina. Potom je $\boldsymbol{F}$ volný svaz s bazí X právě když X generuje $\boldsymbol{F}$ a jsou splněny podmínky (1-6) z Věty 12.3.*

---

[2] na počest Philipa M. Whitmana (nar. 1916)