TEXTY K PŘEDNÁŠCE TEORIE SVAZŮ I
1. PŘEDNÁŠKA
Definice svazu

1.1. **Definice svazu.** Relaci “$\leq$” na množině A nazveme *uspořádáním* pokud je

(i) *tranzitivní*, tj., pokud platí, že $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$ implikuje, že $a \leq c$,

(ii) a platí, že $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$ právě když $a = b$,

pro všechna $a, b, c \in A$.

Buď nyní A množina uspořádaná relací “$\leq$”. Buď X podmnožina množiny A. *Supremem* množiny X budeme rozumět nejmenší $s \in A$ takové, že $x \leq s$ pro všechna $x \in X$. Podobně *infimem* množiny X budeme rozumět největší $i \in A$ takové, že $i \leq x$ pro všechna $x \in X$. Supremum, resp. infimum množiny X budeme značit $\sup X$, resp. $\inf X$. Obecně nemusí suprema a infima konečných podmnožin uspořádané množiny existovat. Všimněme si ještě, že podle definice je supremum prázdné množiny největší prvek množiny A a podobně infimum prázdné množiny je největší prvek množiny A.

Lemma 1.1. *Buď A částečně uspořádaná množina. Nechť X a Y jsou její podmnožiny takové, že existují suprema $\sup X$ a $\sup Y$. Existuje-li $\sup\{\sup X, \sup Y\}$, potom existuje také $\sup(X \cup Y)$ a platí, že*

$$\sup(X \cup Y) = \sup\{\sup X, \sup Y\}.$$

Podobně pro infima.

Důkaz. Nechť $a \in X \cup Y$. Jestliže $a \in X$ tak $a \leq \sup X$, pokud $a \in Y$, tak $a \leq \sup Y$. Proto $a \leq \sup\{\sup X, \sup Y\}$. Je-li naopak $s \in A$ takové, že $a \leq s$ pro každé $a \in X \cup Y$, potom $\sup X, \sup Y \leq s$, odkud dostaneme $\sup\{\sup X, \sup Y\} \leq s$. Proto $\sup\{\sup X, \sup Y\} = \sup(X \cup Y)$. □

Lemma 1.2. *Buď A částečně uspořádaná množina. Má-li každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum (infimum), potom má každá neprázdná konečná podmnožina množiny A supremum (infimum).*

Důkaz. Předpokládejme, že má každá dvouprvková podmnožina množiny A supremum a ukažme, že každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum. Případ infima je analogický. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. Buď n nejmenší přirozené číslo pro které existuje n-prvková podmnožina X, která nemá v A supremum. Množina X je alespoň dvouprvková, a proto je sjednocením svých neprázdných vlastních podmnožin M_1 a M_2. Množiny M_1 a M_2 mají méně než n prvků, a proto mají podle indukčního předpokladu suprema. Protože existuje supremum každé dvouprvkové podmnožiny množiny A, existuje $\sup\{\sup M_1, \sup M_2\}$. Vzhledem k Lemmatu 1.1 je toto supremum rovno $\sup X$, což je ve sporu s volbou množiny X. □

Buď A uspořádaná množina jejíž každá dvouprvková podmnožina má supremum a infimum. Na množině A definujme binární operace *spojení* , značíme "$\vee$", a *průseku*, značíme "$\wedge$", takto: $a \vee b = \sup\{a, b\}$ a $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Právě definované operace mají tyto vlastnosti:

Komutativita:
- $a \vee b = b \vee a$,
- $a \wedge b = b \wedge a$,

Asociativita:
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,

Absorpce: $a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a$,

pro všechna $a, b, c \in A$.

Důkaz. Všechny vlastnosti plynou snadno z definic. Zcela zřejmá je komutativita. V případě spojení dostaneme s využitím Lemmatu 1.1, že

$$a\vee(b\vee c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{a, b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a\vee b)\vee c.$$

Podobně postupujeme v případě průseku a tak ukážeme asociativitu. Zbývá absorpce. Podle definice máme $a \vee (a \wedge b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\}$. Protože $a \geq \inf\{a, b\}$, je $\sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$. Podobně $a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$ a protože $a \leq \sup\{a, b\}$, platí, že $\inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$. □

Definice. Množinu A spolu s komutativními a asociativními operacemi "$\vee$" a "$\wedge$" svázanými vlastností absorpce nazveme *svazem*.

Lemma 1.3. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Potom platí*

(i) $a = a \vee a = a \wedge a$,
(ii) $a = a \wedge b$ *právě když* $b = a \vee b$,

pro všechna $a, b \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Díky absorpci platí, že $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$ a podobně $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$. Odtud plyne (i).

Předpokládejme, že $a = a \wedge b$. Potom $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$. Poslední rovnost platí opět díky absorpci. Opačnou implikaci bodu (ii) dokážeme analogicky. $\square$

Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Na množině A definujme relaci "$\leq$" takto: $a \leq b$ právě když $a = a \wedge b$ (což je podle Lemma 1.3(ii) ekvivalentní rovnosti $b = a \vee b$).

Tvrzení 1.4. *Buď $\boldsymbol{A}$ svaz. Relace "$\leq$" indukovaná svazovými operacemi je uspořádáním množiny A. Přitom pro všechna $a, b \in A$ platí, že $a \vee b = \sup\{a, b\}$ a $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Speciálně, každá neprázdná konečná podmnožina množiny A má supremum a infimum.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a = a \wedge b$ a zároveň $b = b \wedge c$, tj., že $a \leq b$ a zároveň $b \leq c$. Potom $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, odkud je vidět, že $a \leq c$. Proto je relace "$\leq$" tranzitivní. Platí-li $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$, potom $a = a \wedge b = b$. Podle Lemmatu 1.3(i) platí, že $a = a \wedge a$, tedy $a \leq a$. Proto je relace "$\leq$" uspořádáním množiny A.

Z absorpce a komutativity plyne, že $a = a \wedge (a \vee b)$ a $b = b \wedge (a \vee b)$, odkud $a, b \leq a \vee b$. Je-li naopak $a, b \leq c$, platí podle Lemmatu 1.3(ii), že $c = a \vee c = b \vee c$. Odtud $c = a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ a proto $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Podobně ukážeme, že $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Existence infim a suprem všech neprázdných konečných podmnožin množiny A plyne z Lemmatu 1.2. $\square$

Na svaz je tak možné pohlížet jako na algebru se dvěma operacemi "$\vee$" a "$\wedge$" splňujícími příslušné axiomy nebo jako na uspořádanou množinu v níž má každá neprázdná konečná podmnožina supremum a infimum.

Definice. Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *omezený*, má-li největší a nejmenší prvek. Největší prvek svazu obvykle značíme $1_{\boldsymbol{A}}$, nejmenší pak $0_{\boldsymbol{A}}$ (nebo jen 1 a 0, je-li svaz $\boldsymbol{A}$ jednoznačně určený ze souvislosti).

Všimněme si, že je-li A uspořádaná množina a značí-li $\emptyset$ prázdnou podmnožinu A, jsou $\sup \emptyset$, resp. $\inf \emptyset$ rovny nejmenšímu, resp. největšímu prvku množiny A. Omezené svazy tedy odpovídají uspořádaným množinám, jejichž každá konečná podmnožina má supremum a infimum.

Definice. Svaz nazveme *úplným*, má-li každá jeho podmnožina infimum.

Je-li $\boldsymbol{A}$ úplný svaz a X jeho podmnožina, potom je

$$\sup X = \inf\{a \in \boldsymbol{A} \mid b \leq a \text{ pro každé } b \in X\}.$$

Proto má každá podmnožina úplného svazu také supremum. V souladu se značením binárních svazových operací budeme značit $\bigvee X$, resp. $\bigwedge X$ supremum, resp. infimum podmnožiny X uspořádané množiny A.

1.2. **Modulární svazy.** Svaz $\boldsymbol{A}$ nazveme *modulární* pokud pro každé $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ takové, že $a \leq c$, platí rovnost

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c. \tag{1.1}$$

Všimněme si, že nerovnost

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$$

platí za předpokladu $a \leq c$ v každém svazu. Proto jsou modulární svazy charakterizovány právě tím, že platí opačná nerovnost. Z výše uvedené definice není patrné, že modulární svazy tvoří varietu neboť podmínka v předchozí definici je implikací, nikoliv identitou. To, že je možné nahradit tuto implikaci identitou ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.5. *Svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární právě když*

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c \tag{1.2}$$

pro všechna $a, b, c \in \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární a položme $a' = a \wedge c$. Protože $a' = (a \wedge c) \leq c$, dostáváme, že $a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge c$ což odpovídá identitě (1.2).

Naopak předpokládejme, že svaz $\boldsymbol{A}$ splňuje identitu (1.2). Nechť $a, b, c \in \boldsymbol{A}$ jsou takové, že $a \leq c$. Potom $a = a \wedge c$ a po dosazení do (1.2) dostaneme rovnosti $a \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge c$, tedy svaz $\boldsymbol{A}$ je modulární. □

Vidíme tedy, že třída všech modulárních svazů je varietou a tedy je uzavřena na podsvazy, direktní součiny a homomorfní obrazy. Varietu všech modulárních svazů budeme dále značit $\mathcal{M}$.

Tvrzení 1.6. *Buď $\boldsymbol{R}$ okruh a $\boldsymbol{M}$ nějaký $\boldsymbol{R}$-modul. Potom je svaz všech podmodulů modulu $\boldsymbol{M}$ modulární. Speciálně je modulární svaz všech podprostorů libovolného vektorového prostoru nebo svaz všech podgrup libovolné Abelovy grupy.*

Důkaz. Připomeňme, že podmoduly modulu $\boldsymbol{M}$ tvoří svaz v němž spojení podmodulů $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{Y}$ odpovídá jejich součtu $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} := \{x + y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y}\}$ a průseku odpovídá průnik $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$.

Nechť $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ jsou podmoduly modulu $\boldsymbol{X}$ takové, že $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$. Potom

$$(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) \cap \boldsymbol{Z} = \{x + y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \text{ a } x + y \in \boldsymbol{Z}\} = \cdots .$$

Pokud $x+y \in \boldsymbol{Z}$ a $x \in \boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{Z}$, tak $y = (x+y) - x \in \boldsymbol{Z}$. Proto máme,

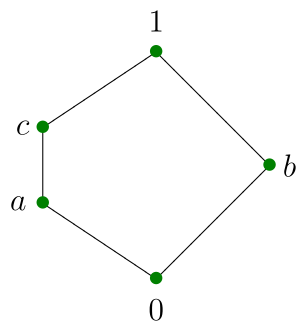
$$\cdots = \{x + y \mid x \in \boldsymbol{X}, y \in \boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}\} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} \cap \boldsymbol{Z}).$$

□

Tvrzení 1.7. *Svaz všech normálních podgrup libovolné grupy je modulární.*

Důkaz. Buď $\boldsymbol{G}$ grupa. Normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ tvoří svaz, v němž spojení dvou normálních podgrup $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{K}$ odpovídá jejich součin $\boldsymbol{HK} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K}\}$ a průseku odpovídá jejich průnik. Nechť $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$ jsou normální podgrupy grupy $\boldsymbol{G}$ takové, že $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{L}$. Potom $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} := \{xy \mid x \in \boldsymbol{H}, y \in \boldsymbol{K} \text{ a } xy \in \boldsymbol{L}\}$. Protože $y = x^{-1}(xy) \in \boldsymbol{HL} \subseteq \boldsymbol{L}$, odkud $y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$, dostáváme, že $\boldsymbol{HK} \cap \boldsymbol{L} = \{xy \mid x \in \boldsymbol{H} \text{ a } y \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}\} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L})$. □

Svaz $\boldsymbol{N_5}$ na následujícím obrázku není modulární:



Obrázek 1. Svaz $\boldsymbol{N_5}$

Je totiž $a \leq c$ a zároveň $a \vee (b \wedge c) = a < c = (a \vee b) \wedge c$.

V souvislosti s Tvrzením 1.7 poznamenejme, že svaz všech podgrup modulární být nemusí. Uvažme například grupu $\boldsymbol{S_4}$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a její podgrupy: $\boldsymbol{A}$ generovanou transpozicí $(1, 2)$, $\boldsymbol{B}$ generovanou čtyř-cyklem $(1, 2, 3, 4)$ a $\boldsymbol{C}$ generovanou transpozicemi $(1, 2)$ a $(3, 4)$. Snadno nahlédneme, že tyto podgrupy spolu s triviální podgrupou a celou grupou $\boldsymbol{S_4}$ tvoří podsvaz svazu všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$, který je izomorfní $\boldsymbol{N_5}$. Proto svaz všech podgrup grupy $\boldsymbol{S_4}$ není modulární.