

CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

6. CVIČENÍ / 19. KVĚTNA 2023

Úloha 6.1. Necht' \mathbf{P} a \mathbf{Q} jsou uspořádané množiny, na které budeme nahlížet jako na kategorie. Necht' $F: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ a $G: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ jsou monotónní (tj., uspořádání zachovávající) zobrazení. Ukažte, že zobrazení F je levým adjunktem zobrazení G právě když

$$p \leq G(q) \iff F(p) \leq q$$

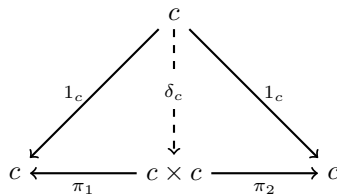
pro všechna $p \in \mathbf{P}$ a $q \in \mathbf{Q}$.

Úloha 6.2. Necht' \mathbf{P} a \mathbf{Q} jsou uspořádané množiny, na které budeme nahlížet jako na kategorie. Předpokládejme, že v množinách \mathbf{P} a \mathbf{Q} existují libovolná suprema a infima. Necht' $F: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ je zobrazení zachovávající suprema. Ukažte, že existuje levý adjunkt k zobrazení F a popište jej.

Úloha 6.3. Uvažme situaci jako v úloze 6.1 a položme $H = GF: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$. Ukažte, že zobrazení H je monotónní, idempotentní (tj., že $H = HH$), a že $p \leq H(p)$ pro všechna $p \in \mathbf{P}$. Jaké vlastnosti má zobrazení $K = FG: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$?

Úloha 6.4. Ukažte, že součin $\times: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ je pravým adjunktem k diagonálnímu funktoru $\Delta: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Úloha 6.5. Ukažte, že jednotka adjunkce $\langle \Delta, \times, \varphi \rangle$ je přirozená transformace $\delta: I_{\mathbf{C}} \rightarrow \times \circ \Delta$ taková, že pro každý objekt c kategorie \mathbf{C} je $\delta_c: c \rightarrow c \times c$ (jednoznačně určený) morfismus takový, že diagram



komutuje.

Úloha 6.6. Najděte levý adjunkt k diagonálnímu funktoru $\Delta: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$

Úloha 6.7. Buď R okruh a uvažme zapomínající funktor $U: R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Najděte levý a pravý adjunkt k tomuto funktoru.

Úloha 6.8. Ukažte, že beztorzní Abelovy grupy tvoří reflexivní podkategorii kategorie Abelových grup.