CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

4. CVIČENÍ / 21. DUBNA 2023

Úloha 4.1. *Buď A, resp. B, kosoučin dvou kopií Abelovy grupy $\mathbb{Z}_2$ v kategorii* **Ab** *Abelových grup, resp. v kategorii* **Grp** *grup. Ukažte, že $A \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, a že grupa B je nekonečná.*

Úloha 4.2. *V kategorii* **Ab** *Abelových grup najděte ekvalizér a koekvalizér homomorfismů*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_{60} \\ a &\mapsto 6a \mod 60 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_{60} \\ a &\mapsto 10a \mod 60 \end{aligned}$$

Úloha 4.3. *Buď p pevně zvolené prvočíslo. Pro přirozená čísla $n \leq m$ uvažme homomorfismus*

$$\begin{aligned} f_{m,n}\colon \mathbb{Z}_{p^m} &\to \mathbb{Z}_{p^n} \\ a &\mapsto p^{n-m}a \end{aligned}$$

Označme **N** *kategorii indukovanou uspořádanou množinou přirozených čísel. Objekty této kategorii jsou přirozená čísla $1, 2, \dots$ a morfismy uspořádané dvojice přirozených čísel. Uvažme diagram $F\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Ab}$ daný předpisy*

- *$F(n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ pro každé přirozené číslo;*
- *$F(m \leq n) = f_{m,n}$ pro každou uspořádanou dvojici $m \leq n$ přirozených čísel.*

Buď $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$, kde $A_i = \langle a_i \rangle$ je nekonečná cyklická grupa generovaná prvkem a_i pro každé $i \in \mathbb{N}$. Položme $a_0 = 0$ a označme B podgrupu grupy A generovanou množinou $\{p \cdot a_i - a_{i-1} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Položme $L = A/B$ a pro $n \in \mathbb{N}$ definujme zobrazení

$$\begin{aligned} f_n\colon \mathbb{Z}_{p^n} &\to L \\ x &\mapsto x \cdot a_n. \end{aligned}$$

Ukažte, že f_n jsou dobře definované homomorfismy, že to jsou vnoření, a že $\langle L \mid f_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ tvoří limitu diagramu F.

Úloha 4.4. *Označme L_n obraz vnoření f_n. Ukažte, že*

1. *řád každého prvku grupy L je mocninou prvočísla p;*
2. $L_n = \{x \in L \mid \text{řád prvku } x \text{ je nejvýše } p^n\}$;
3. $\{0\} \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots$, *a že L_n jsou jediné vlastní netriviální podgrupy L;*
4. $L \simeq L/L_n$ *pro každé $n \in \mathbb{N}$, tj. grupa L je izomorfní každému svému faktoru.*

Úloha 4.5. *Ukažte, že rovnice $a = n \cdot x$ s neznámou x má v grupě L řešení pro každé nenulové celé číslo n.*

Úloha 4.6. *Uvažme „pull-back" $\langle A \times_C B \mid \delta, \gamma \rangle$ diagramu $B \xrightarrow{\beta} C \xleftarrow{\alpha} A$ znázorněný následujícím diagramem:*

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

Ukažte, že je-li β monomorfismus, je také γ monomorfismus.

Úloha 4.7. *Ukažte, že ekvalizér morfismů $f, g \colon B \to A$ lze sestrojit pomocí „pull-backu" diagramu*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\langle 1_B, f \rangle"] \\ B \arrow[r, "\langle 1_B, g \rangle"'] & B \times A \end{tikzcd}$$

Úloha 4.8. *Uvažme komutativní diagram*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Ukažte, že

1. *jsou-li „pull-backy" oba vnitřní čtverce, je „pull-back" také vnější obdélník;*
2. *jsou-li vnější obdélník a pravý vnitřní čtverec „pull-backy", je „pull-back" také levý čtverec.*