

## CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336 ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

4. CVIČENÍ / 21. DUBNA 2023

**Úloha 4.1.** *Bud'  $A$ , resp.  $B$ , kosoučin dvou kopií Abelovy grupy  $\mathbb{Z}_2$  v kategorii  $\mathbf{Ab}$  Abelových grup, resp. v kategorii  $\mathbf{Grp}$  grup. Ukažte, že  $A \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , a že grupa  $B$  je nekonečná.*

**Úloha 4.2.** *V kategorii  $\mathbf{Ab}$  Abelových grup najděte ekvalizér a koekvalizér homomorfismů*

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$$
$$a \mapsto 6a \pmod{60}$$

*a*

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$$
$$a \mapsto 10a \pmod{60}$$

**Úloha 4.3.** *Bud'  $p$  pevně zvolené prvočíslo. Pro přirozená čísla  $n \leq m$  uvažme homomorfismus*

$$f_{m,n}: \mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$$
$$a \mapsto p^{n-m}a$$

*Označme  $\mathbf{N}$  kategorii indukovanou uspořádanou množinou přirozených čísel. Objekty této kategorii jsou přirozená čísla  $1, 2, \dots$  a morfismy uspořádané dvojice přirozených čísel. Uvažme diagram  $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Ab}$  daný předpisy*

- $F(n) = \mathbb{Z}_{p^n}$  pro každé přirozené číslo;
- $F(m \leq n) = f_{m,n}$  pro každou uspořádanou dvojici  $m \leq n$  přirozených čísel.

*Bud'  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , kde  $A_i = \langle a_i \rangle$  je nekonečná cyklická grupa generovaná prvkem  $a_i$  pro každé  $i \in \mathbb{N}$ . Položme  $a_0 = 0$  a označme  $B$  podgrupu grupy  $A$  generovanou množinou  $\{p \cdot a_i - a_{i-1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Položme  $L = A/B$  a pro  $n \in \mathbb{N}$  definujme zobrazení*

$$f_n: \mathbb{Z}_{p^n} \rightarrow L$$
$$x \mapsto x \cdot a_n.$$

*Ukažte, že  $f_n$  jsou dobře definované homomorfismy, že to jsou vnoření, a že  $\langle L \mid f_n; n \in \mathbb{N} \rangle$  tvoří limitu diagramu  $F$ .*

**Úloha 4.4.** *Označme  $L_n$  obraz vnoření  $f_n$ . Ukažte, že*

1. řád každého prvku grupy  $L$  je mocninou prvočísla  $p$ ;
2.  $L_n = \{x \in L \mid \text{řád prvku } x \text{ je nejvýše } p^n\}$ ;
3.  $\{0\} \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots$ , a že  $L_n$  jsou jediné vlastní netriviální podgrupy  $L$ ;
4.  $L \simeq L/L_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , tj. grupa  $L$  je izomorfní každému svému faktorů.

**Úloha 4.5.** Ukažte, že rovnice  $a = n \cdot x$  s neznámou  $x$  má v grupě  $L$  řešení pro každé nenulové celé číslo  $n$ .

**Úloha 4.6.** Uvažme „pull-back“  $\langle A \times_C B \mid \delta, \gamma \rangle$  diagramu  $B \xrightarrow{\beta} C \xleftarrow{\alpha} A$  znázorněný následujícím diagramem:

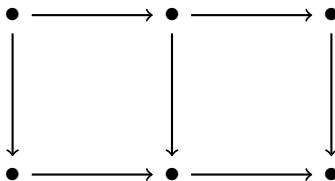
$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \xrightarrow{\gamma} & A \\ \delta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\beta} & C \end{array}$$

Ukažte, že je-li  $\beta$  monomorfismus, je také  $\gamma$  monomorfismus.

**Úloha 4.7.** Ukažte, že ekvalizér morfismů  $f, g: B \rightarrow A$  lze sestavit pomocí „pull-backu“ diagramu

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow \langle 1_B, f \rangle & \\ B & \xrightarrow{\langle 1_B, g \rangle} & B \times A \end{array}$$

**Úloha 4.8.** Uvažme komutativní diagram



Ukažte, že

1. jsou-li „pull-backy“ oba vnitřní čtverce, je „pull-back“ také vnější obdélník;
2. jsou-li vnější obdélník a pravý vnitřní čtverec „pull-backy“, je „pull-back“ také levý čtverec.