CVIČENÍ K PŘEDMĚTU NMAG336
ÚVOD DO TEORIE KATEGORIÍ

3. CVIČENÍ / 24. BŘEZNA 2023

Úloha 3.1. *Buď* $U\colon \mathbf{Vec}_T \to \mathbf{Set}$ *zapomínající funktor. Pro množinu* X *označme* V_X *aritmetický vektorový prostor s bází* X *(všech formálních lineárních kombinací prvků* X*). Uvažme vnoření* $u\colon X \to V_X$ *inkluzí. Ukažte, že dvojice* $\langle u, V_X\rangle$ *je* univezální morfismus *z* X *do zapomínajícího funktoru* U.

Úloha 3.2. *Uvažme kategorii* $\mathbf{ID}$*, jejíž objekty jsou obory integrity a jejíž morfismy jsou prosté okruhové homomorfismy. Dále označme* $\mathbf{Fld}$ *kategorii těles. Všimněme si, že* $\mathbf{Fld}$ *je úplnou podkategorií kategorie* $\mathbf{ID}$*. Buď* $U\colon \mathbf{Fld} \to \mathbf{ID}$ *zapomínající funktor, který tělesu* T *přiřadí obor integrity* $U(T)$*, vzniklý vynecháním parciální unární operace inverze v* T *(tj. operace* $t \mapsto t^{-1}$ *pro* $t \in T \setminus \{0\}$*), a který je identitou na morfismech. Popište univerzální morfismus z oboru integrity* R *do funktoru* U.

Úloha 3.3. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je kategorie a* $G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ *funktor.* Univerzálním objektem *funktoru* G *rozumnějme dvojici* $\langle a, u\rangle$ *sestávající z objektu kategorie* $\mathbf{A}$ *a z prvku* $u \in G(a)$ *takového, že*

> *pro každou dvojici* $\langle b, v\rangle$*, kde* b *je objekt kategorie* A *a* $v \in G(b)$*,*
> *existuje právě jeden morfismus* $g\colon a \to b$ *v* $\mathbf{A}$ *takový, že* $v = G(g)(u)$*.*

Pro množinu X *a prvek* $x \in X$ *označme* $\dot{x}\colon \{\emptyset\} \to X$ *zobrazení dané předpisem* $\dot{x}(\emptyset) = x$*. Ukažte, že dvojice* $\langle a, u\rangle$ *je univerzálním objektem funktoru* G *právě když je dvojice* $\langle a, \dot{u}\rangle$ *univerzálním morfismem z množiny* $\{\emptyset\}$ *do* G.

Úloha 3.4. *Nechť* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *je funktor a nechť* b *je objekt kategorie* $\mathbf{B}$*. Uvažme funktor* $G := \mathbf{B}(b, F(-)) = \mathbf{B}(b, -) \circ F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$*. Ukažte, že dvojice* $\langle a, u\rangle$ *je univerzálním morfismem z* b *fo* F *právě když je univerzálním objektem funktoru* G.

Úloha 3.5. *Popište, jak vypadají součiny a kosoučiny kategorii*

- $\mathbf{Set}$ *všech množin;*
- $\mathbf{Vec}_T$ *všech vektorových prostorů nad tělesem* T*;*
- $\mathbf{Grp}$ *všech grup;*
- $\mathbf{Ab}$ *všech abelových grup;*

Úloha 3.6. *Buď* P *uspořádaná množina uvažovaná jako kategorie. Popište součiny a kosoučiny v kategorii* P*. Rozhodněte, kdy je kategorie* P *kompletní a kdy je kokompletní.*

Úloha 3.7. *Ukažte, že každý ekvalizér je monomorfismus a každý koekvalizér je epimorfismus.*

Úloha 3.8. *Popište, ekvalizéry a koekvalizéry v kategorii*

- $\mathbf{Set}$ *všech množin;*
- $\mathbf{Vec}_T$ *všech vektorových prostorů nad tělesem* T*;*
- $\mathbf{Grp}$ *všech grup;*
- $\mathbf{Ab}$ *všech abelových grup;*